

LNF - 65/48
20 Dicembre 1965

G. Sanna: UN DISPOSITIVO PER LA FOCALIZZAZIONE E
L'ANALISI MAGNETICA DI PIONI CARICHI FOTOPRODOTTI
DALL'ELETTROSINCROTRONE DI FRASCATI.
Parte III^a: Controllo delle proprietà ottiche dei magneti me-
diante un odoscopio a filo. -

(Nota interna: n. 300)

Nota interna: n. 300
20 Dicembre 1965.

G. Sanna: UN DISPOSITIVO PER LA FOCALIZZAZIONE E L'ANALISI MAGNETICA DI PIONI CARICHI FOTOPRODOTTI DALL'ELETTROSINCROTRONE DI FRASCATI. PARTE III: CONTROLLO DELLE PROPRIETA' OTTICHE DEI MAGNETI MEDIANTE UN ODOSCOPIO A FILO. -

A) - INTRODUZIONE -

In questa nota viene descritto un odoscopio adatto al rilievo delle traiettorie percorse da particelle cariche attraversanti un campo magnetico e sono inoltre presentati i risultati dei rilevamenti con esso effettuati, sugli elettromagneti costituenti il dispositivo illustrato nella relazione LNF-63/35.^(x)

Questi elettromagneti sono stati sottoposti a misure magnetiche che sono state descritte nella relazione LNF-63/82^(x) e che hanno permesso di schematizzare le distribuzioni reali di campo con opportuni "modelli efficaci" (cfr. Parte II, C). Questi "modelli", mentre da un lato consentono di semplificare notevolmente le previsioni delle proprietà ottiche dei componenti il suddetto dispositivo, non consentono d'altra parte una semplice valutazione degli effetti delle approssimazioni con essi introdotte. Pertanto, il rilievo diretto con l'odoscopio delle traiettorie attraverso le lenti quadrupolari ed il magnete analizzatore, può risolvere questa incertezza consentendo un controllo della bontà delle approssimazioni scelte.

Nel seguito di questa nota, descriveremo:

- Il principio su cui fonda l'odoscopio, cioè l'analogia formale tra la traiettoria di una particella carica e la configurazione di equilibrio di un filo teso e percorso da corrente (B e App. A-1),

(x) - Le due relazioni citate verranno nel seguito indicate semplicemente come Parte I^a e Parte II^a.

- i limiti di validità di questa analogia, e l'influenza e l'entità degli effetti perturbatori presenti (D ed App. A-2, A-3, A-4),
- l'odoscopio praticamente realizzato per l'esecuzione delle misure e la sua messa a punto (C ed App. A-5)
- le misure di controllo delle proprietà ottiche (focali e dispersive) delle lenti quadrupolari e del magnete analizzatore (E).

Verranno infine presentate le conclusioni del confronto tra i risultati ottenuti dalle misure qui descritte e le previsioni sul comportamento ottico dei magneti effettuate sulla base dei "modelli efficaci" sopra menzionati.

Le notazioni usate sono state mantenute coerenti con quelle usate nelle Parti I^a e II^a, mentre gli sviluppi di calcolo ed informazioni di dettaglio sono state raccolte nelle appendici.

B) - PRINCIPIO DEL METODO DI SIMULAZIONE DELLE TRAIETTORIE DI PARTICELLE CARICHE IN CAMPO MAGNETICO -

Questo metodo^(1,2) utilizza l'analogia formale (cfr. App. A-1) esistente tra l'equazione differenziale della traiettoria ζ di una particella carica che attraversa una distribuzione stazionaria di campo $\vec{B}(P)$ e l'equazione differenziale della configurazione di equilibrio \mathcal{C} di un filo sottoposto a tensione, percorso da corrente ed immerso nella stessa distribuzione.

Detti q , e $\vec{p} = p \cdot \vec{t}$ la carica e l'impulso della particella, i e $\vec{T} = T \cdot \vec{t}$ la corrente e la tensione del filo, le due suddette equazioni, in forma vettoriale, si scrivono^(x):

$$(1) \quad \frac{d\vec{t}}{d\sigma} - \frac{q}{p} (\vec{t} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$(2) \quad \frac{d\vec{t}}{d\sigma} + \frac{i}{T} (\vec{t} \wedge \vec{B}) = 0$$

Si si desidera quindi che le soluzioni della (1) e della (2) forniscano le stesse relazioni tra le coordinate spaziali (cioè, in sostanza, che sia: $\zeta_{p,q} \equiv \mathcal{C}_{T,i}$), è necessario soddisfare le condizioni seguenti:

(x) - Sia nella (1) che nella successiva (2), \vec{t} e σ rappresentano rispettivamente il versore della tangente e l'ascissa curvilinea di ζ o \mathcal{C} . Salvo contrario avviso, le unità usate sono sempre quelle del sistema razionalizzato.

- 1) - le condizioni d'ingresso nella data distribuzione di campo (punto e direzione) devono essere le stesse sia per la particella che per il filo.
- 2) - deve risultare soddisfatta la relazione seguente ^(x):

$$(3) \quad p/q = - T/i,$$

- 3) - si possono inoltre ritenere trascurabili i seguenti effetti perturbatori⁽⁺⁾:
 - a) - irraggiamento emesso dalla particella,
 - b) - azioni sul filo dovute alla vicinanza di distribuzioni di materiali magnetizzabili (ad es., le espansioni polari degli elettromagneti),
 - c) - peso proprio del filo;
 - d) - rigidità del filo.

Le ipotesi fin qui introdotte corrispondono, in altri termini, ad assumere che le sole forze attive in giuoco siano, da un lato la forza di Lorentz agente sulla particella, e dall'altro la tensione applicata al filo e le forze distribuite laplaciane dovute all'interazione della corrente col campo. Alle forze attive agente sul filo, si devono poi ovviamente aggiungere le opportune reazioni vincolari necessarie ad assicurarne l'equilibrio.

Vogliamo subito osservare, in quanto ci sarà utile più oltre (cfr. D, 3^o), che, nel caso in cui la distribuzione di campo ammetta un piano di simmetria per le equipotenziali magnetiche (P. M.), e la traiettoria ζ da simulare sia sempre in esso contenuta, è possibile dimostrare

-
- (x) - La differenza di segno tra i due membri della (3), sta a significare che per ottenere $\zeta_{p,q} \equiv \mathcal{E}_{T,i}$, è necessario che il verso della corrente nel filo sia, rispetto al verso col quale la particella descrive la $\zeta_{p,q}$, discorde nel caso $q > 0$, e concorde nel caso $q < 0$.
 - (+) - Questi effetti saranno singolarmente analizzati e stimati nelle condizioni effettive di impiego dell'odoscopio e di svolgimento delle misure (cfr. D). Vedremo che essi possono, in genere, ritenersi effettivamente trascurabili, mentre, in alcuni casi, essi sono stati resi tali con una opportuna scelta delle condizioni di svolgimento delle misure.

4.

(cfr. App. A-1) che per la particella e per il filo valgono indipendentemente le relazioni seguenti^(x):

$$(4) \quad \frac{p}{q} = (B \rho)$$

$$(5) \quad - \frac{T}{i} = (B \rho)$$

Pertanto, assunte le stesse condizioni iniziali per la particella e per il filo, la condizione 3), necessaria a che $\frac{p}{q} = \frac{T}{i}$, equivale nel caso suddetto a richiedere che i secondi membri delle (4) e (5) assumono lo stesso valore.

L'analogia prima descritta permette, quando risultino ben soddisfatte le condizioni sopra elencate, di realizzare dispositivi con i quali è possibile riprodurre mediante le configurazioni di equilibrio del filo le traiettorie di particelle di assegnate condizioni iniziali (odoscopi a filo). La modali-

(x) - La quantità $(B \rho)$ (Wb/m) data dal prodotto del modulo della induzione per il raggio osculatore a \mathcal{C} (o \mathcal{E}) in un punto generico della curva (dentro la distribuzione di campo) è costante ed è nota come "rigidità magnetica" della particella (o del filo).

E' poi utile aggiungere che in unità più convenienti per l'uso pratico le (3), (4), (5) si riscrivono:

$$(3') \quad p_{(\text{MeV}/c)} = 2939 \frac{T(\text{gp})}{i(\text{mA})}$$

$$(4') \quad p_{(\text{MeV}/c)} = 2.998 \times 10^{-4} (B \rho)_{(\text{gauss.cm})}$$

$$(5') \quad (B \rho)_{(\text{gauss.cm})} = 9.803 \times 10^6 \frac{T(\text{gp})}{i(\text{mA})}$$

Nella deduzione delle quali si è assunto:

- 1) - $q = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb ($\hat{=}$ 1 carica elementare)
- 2) - per la velocità della luce nel vuoto, il valore: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
- 3) - per l'accelerazione di gravità nel luogo delle misure (Laboratori di Frascati), il valore: $g = 9.803$ m/sec².

tà di realizzazione di tali odoscopi possono poi risultare assai diverse^(3,4) per quanto riguarda la realizzazione dei dispositivi di vincolo degli estremi del filo, per le modalità di applicazione della tensione, i sistemi di rilevamento degli spostamenti e degli angoli, ecc.

Il tipo di dispositivo usato nelle misure descritte nella presente nota (cfr. C) è stato ideato in modo da realizzare praticamente i criteri generali seguenti:

- a) - imporre il passaggio del filo per due punti del P. M. prefissabili (entro opportuni limiti) arbitrariamente,
- b) - non limitare la lunghezza del tratto di filo tra i punti suddetti,
- c) - applicare al filo una tensione costante prefissabile a piacere.

E' opportuno far notare che per odoscopi nei quali la lunghezza del filo tra i due dispositivi di vincolo non è limitabile (come nel tipo da noi usato), il soddisfacimento delle condizioni 1), 2), 3) può non risultare sufficiente affinché risulti "stabilmente": $\mathcal{C}_{T,i} \equiv \mathcal{C}_{P,q}$. Infatti nell'impegno pratico di un tale odoscopio può accadere che, per un certo piazzamento dei punti di vincolo, il filo si allontani progressivamente dalla \mathcal{C} corrispondente, o venga a trovarsi in una condizione critica in cui può mostrare spiccata sensibilità a qualunque perturbazione esterna (come ad esempio, instabilità del campo, della corrente di alimentazione o deboli correnti d'aria).

Più dettagliatamente, per un fissata posizione del 1° punto di vincolo V_1 nel P. M., e per valori assegnati dell'eccitazione del magnete e della rigidità magnetica ($B\rho$) del filo, l'insieme dei fatti sperimentalmente osservati può essere riassunto come segue:

- a) - se si sceglie un piazzamento del 2° punto di vincolo V_2 in modo da ottenere una configurazione \mathcal{C} di equilibrio stabile, e si sposta quindi V_2 lungo di essa così da non variare le condizioni iniziali^(x) si osserva che, approssimando V_2 un certo punto su \mathcal{C} , il filo esibisce il comportamento critico anzidetto, divenendo poi decisamente instabile quando V_2 ha oltrepassato tale punto.
- b) - per certi piazzamenti di V_2 è possibile osservare due distinte configurazioni del filo corrispondenti a diverse condizioni iniziali, una delle quali risulta stabile, mentre l'altra è instabile.

(x) - Cioè V_2 è spostato lungo \mathcal{C} mantenendo la stessa direzione di uscita del filo di punto fisso V_1 del P. M., ma aumentando progressivamente la lunghezza del tratto di filo compreso tra V_1 e V_2 .

La spiegazione di questi effetti va ricercata nelle diverse condizioni al contorno esistenti nel caso della traiettoria, e del filo considerati nella analogia. Un'analisi approfondita del problema dovuta a Citron et al⁽⁵⁾, dimostra quanto segue:

"data la solita distribuzione di \vec{B} dotata di P.M. si consideri su P.M. l'insieme delle traiettorie ζ aventi lo stesso valore di $(B\rho)$ e che, uscendo da un punto 0 assegnato, l'attraversano. Si consideri poi la curva involuppo \mathcal{J} delle ζ suddette ed i loro punti C di contatto \mathcal{J} . Allora, preso $V_1 \equiv 0$ e scelta una ζ dell'insieme individuata dalle sue condizioni iniziali, ponendo V_2 lungo la ζ scelta, si avrà una configurazione stabile del filo se V_2 precede (nel verso del moto delle particelle) C, instabile se V_2 segue C'' .

Questo risultato è sufficiente a spiegare, per ciò che riguarda la stabilità dell'equilibrio del filo, i fatti sperimentali elencati in a) e b). Consideriamo infatti la fig. 1: in essa le traiettorie estreme ζ_i , ζ_s , (compa-

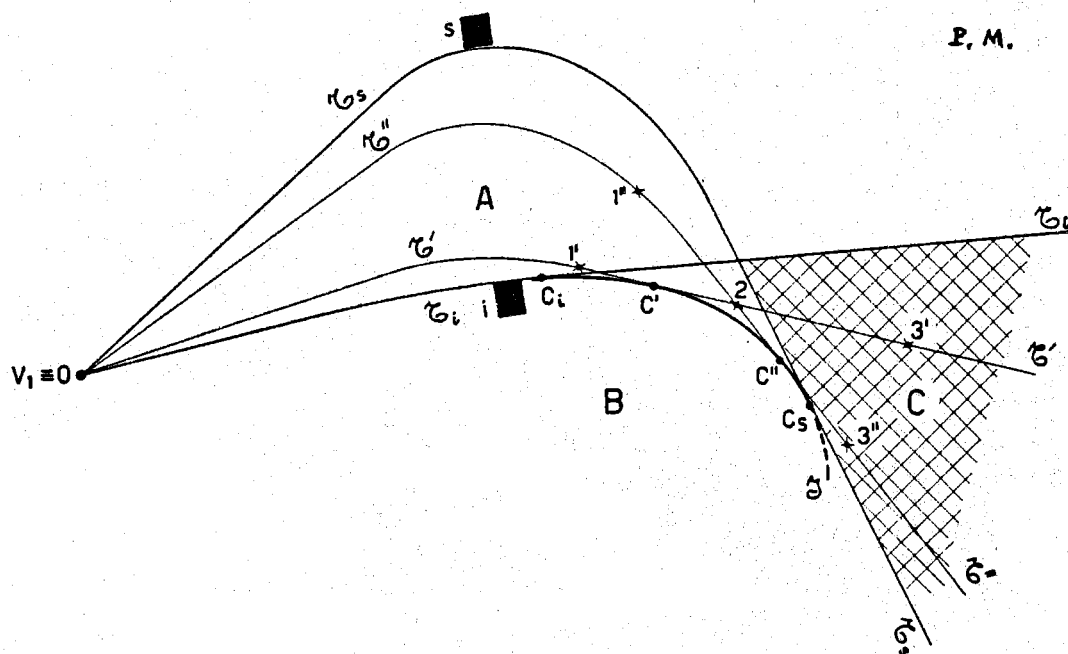


FIG. 1 - Con riferimento al paragrafo B del testo la figura illustra, in un caso generico, la situazione della stabilità delle configurazioni del filo tra i punti di vincolo V_1 (simulante una sorgente puntiforme posta in 0) e V_2 che può essere preso coincidente con uno qualunque dei punti $1', 1'', 2, \dots$. Detti punti, per semplicità, sono presi esternamente alla distribuzione di campo. Sono rappresentate le varie regioni (A, B, C) corrispondenti, per ciò che riguarda la posizione di V_2 , a condizioni diverse per la stabilità dell'equilibrio del filo. La curva \mathcal{J} indica lo involuppo delle traiettorie del P.M. uscenti da 0 e corrispondenti allo stesso valore di $(B\rho)$. ζ_i e ζ_s indicano le traiettorie estreme consentite dai diagrammi i ed s posti nella distribuzione.

tibilmente coi limiti della distribuzione di campo o i diaframmi in essa posti) dividono il P.M. in diverse regioni di diverso significato per quanto riguarda la stabilità delle configurazioni di filo che si ottengono ponendo V_2 all'interno dell'una o dell'altra di esse. Utilizzando il risultato precedente si ricava immediatamente che:

- 1) - se V_2 è posto nella regione A si ottengono per il filo configurazioni, di equilibrio stabile. Ad es. per $V_2 \equiv 1'$, o $V_2 \equiv 1''$ si ottengono le configurazioni stabili corrispondenti rispettivamente alle ζ' o ζ'' .
- 2) - se V_2 è nella regione C si hanno sempre configurazioni instabili. Ad es. per $V_2 \equiv 3'$ o $V_2 \equiv 3''$ le configurazioni corrispondenti alle ζ' o ζ'' presentano instabilità.
- 3) - se V_2 è nella regione B, per una assegnata ζ è possibile avere una configurazione stabile o instabile secondo che V_2 precede o segue il punto di contatto della ζ con l'involuppo. Inoltre nei punti di questa regione può verificarsi quanto detto precedentemente in b). Ad es., per $V_2 \equiv 2$ si possono rilevare le due configurazioni corrispondenti alle traiettorie ζ' e ζ'' , delle quali quella corrispondente a ζ'' è stabile, mentre l'altra è instabile. Le altre regioni del piano non sono poi interessate dalle traiettorie.

Concludendo si può dire che al fine di ottenere configurazioni sicuramente stabili del filo è necessario restringere il piazzamento del 2° punto di vincolo all'interno della regione A. La determinazione dei limiti di questa regione implica la conoscenza "a priori" delle traiettorie limiti effettive consentite dai diaframmi, ma in pratica è sufficiente prevedere queste traiettorie in modo approssimato sulla base del "modello rettangolare" restringendo poi la regione A con un opportuno margine di sicurezza.

C) - DESCRIZIONE DEL DISPOSITIVO SPERIMENTALE -

Questo fu realizzato tenendo presente i principi enunciati al paragrafo precedente e cercando inoltre, per quanto consentito dalla strumentazione disponibile, di realizzare un accurato sistema di rilevamento delle traiettorie e di allineamento delle varie parti rispetto ai magneti sottoposti a misura.

Nelle figg. 2 a) e b) sono mostrate la vista laterale e la pianta dell'odoscopio nella disposizione nella quale esso è stato utilizzato per le misure sulle lenti quadrupolari.

Descriveremo innanzi tutto i dispositivi V_1, V_2 di vincolo del filo rappresentati nella figg. 3 a) e b). Il primo di essi (V_1) ha il duplice scopo di fornire un ancoraggio per uno degli estremi del filo e di imporre, qualunque

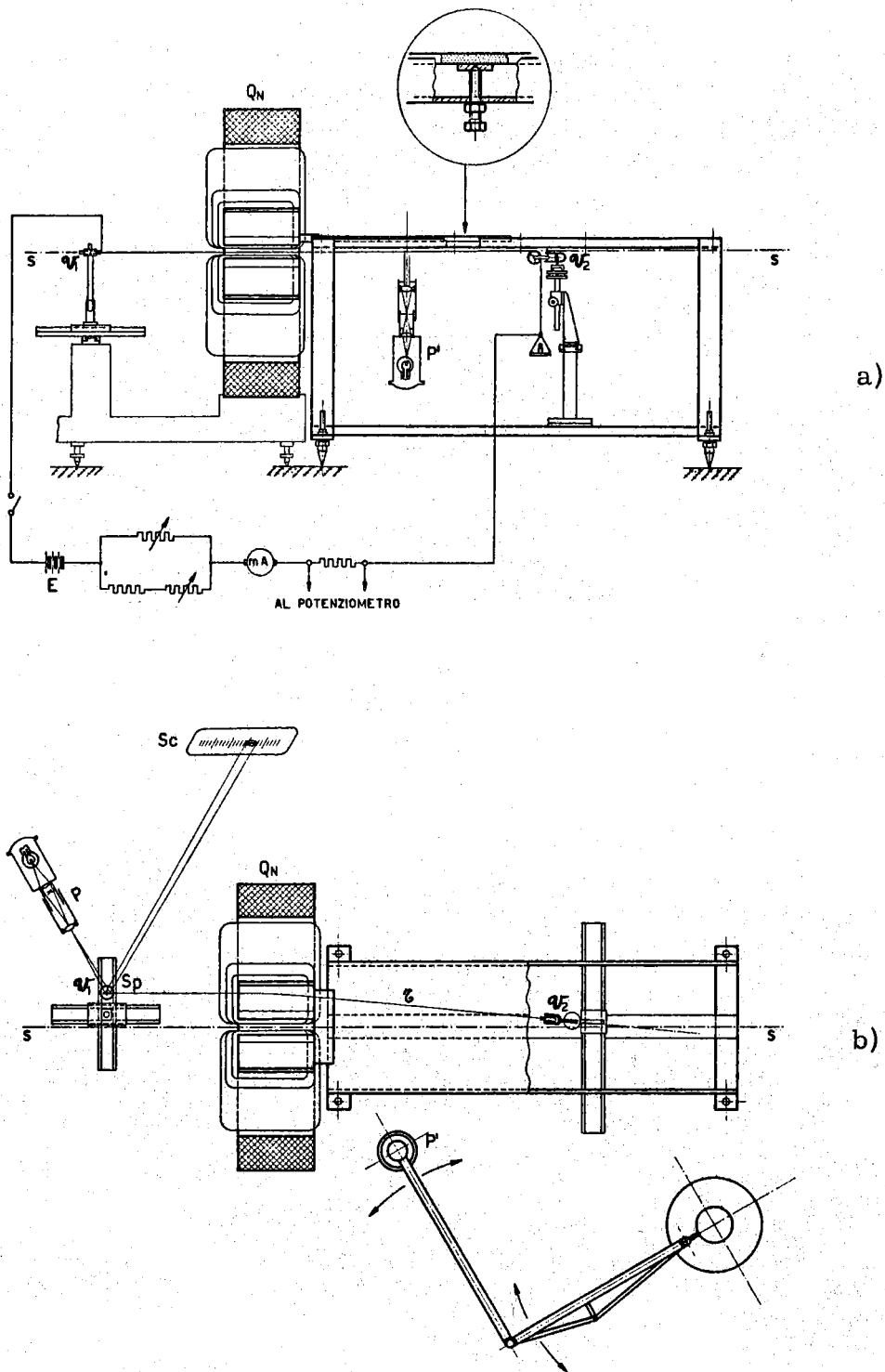


FIG. 2 - Viste dell'odoscopio a filo nella disposizione adottata per il rilievo di traiettorie di particelle attraversanti le lenti quadrupolari Q_N .

a) - Vista laterale - sono visibili i dispositivi di vincolo del filo V_1 e V_2 ed il sistema di rilevamento delle traiettorie all'uscita della lente, P' indica il proiettore mobile usato per il rilievo delle coordinate del filo

b) - Vista dall'alto. E' visibile il sistema a leva ottica per il rilievo delle rotazioni del filo attorno al punto V_1 del P.M.

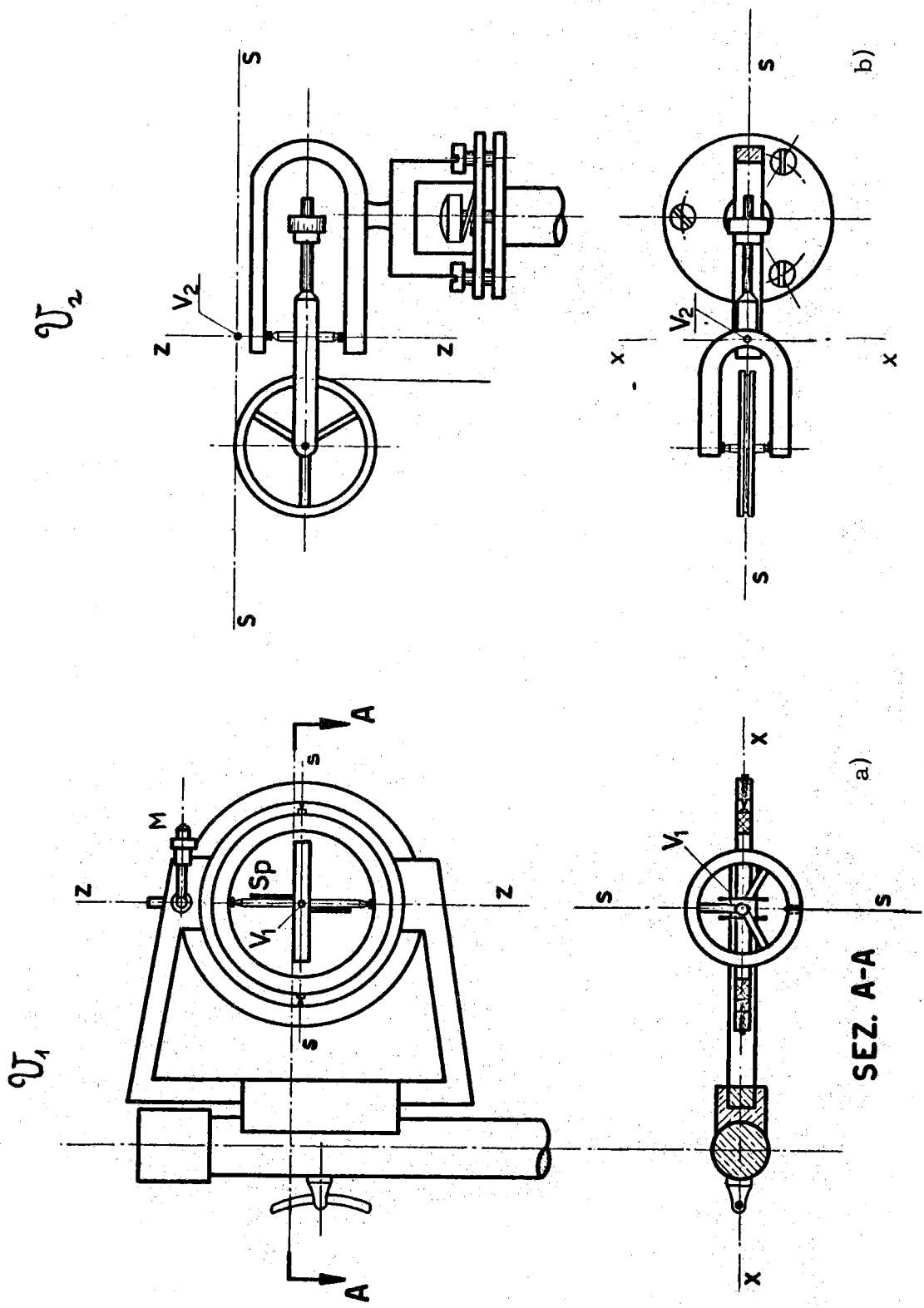


FIG. 3 - Viste dei due dispositivi di vincolo del filo.

- a) - Vincolo \mathcal{U}_1 che impone il passaggio del filo per il punto V_1 del P.M.
- b) - Vincolo \mathcal{U}_2 che consente l'applicazione della tensione al filo imponendo il suo passaggio per il punto V_2 del P.M.

sia l'orientazione di questo nello spazio, il passaggio per un punto fisso V_1 , coincidente in genere con un "punto oggetto" posto nel P.M. davanti alla lente. Ciò è realizzato praticamente fissando un estremo del filo ad una leggera rotella in araldite (diametro: 2.4 cm) il cui asse di rotazione è imperniato agli estremi in una analoga rotella di diametro maggiore (=3.7 cm).

Questa, a sua volta, può ruotare attorno ad un asse diametrale che risulta anche complanare ed ortogonale all'asse della prima rotella. Il sistema può quindi consentire due rotazioni indipendenti attorno al punto V_1 . Il semiasse superiore della rotella interna reca, per la misura delle rotazioni col metodo della leva ottica, un leggero specchietto S_p costituito da $1/4$ di lamina coprioggetto per microscopio metallizzata sulla faccia esterna. Un analogo specchietto è posto sul semiasse inferiore per contrappesare l'insieme. L'ancoraggio del filo alla rotella interna si effettua utilizzando un rubino forato inserito nella rotella stessa; la successiva parte di filo (non sottoposta a tensione) è collegata al morsetto M di alimentazione.

L'insieme delle due rotelle è poi montato su una incastellatura rigida connessa ad un sostegno verticale il quale è, a sua volta, fissato su un sistema di due guide e slitte orizzontali tali da permettere spostamenti ortogonali o paralleli all'asse s nel P.M.

Per quanto riguarda il dispositivo di vincolo V_2 (fig. 3b) si può dire che esso è stato ideato in modo da imporre il passaggio del filo per un punto fisso V_2 del P.M. e per consentire l'applicazione al filo stesso della tensione T (cfr. B).

Queste condizioni sono praticamente realizzate adagiando il filo nella gola di una puleggia in araldite (diametro 3 cm) il cui asse orizzontale è imperniato in una staffa ad U. Questa è dotata di contrappeso regolabile e può ruotare attorno ad un asse verticale la cui intersezione col P.M. individua il punto V_2 . L'asse verticale è, a sua volta imperniato in una seconda staffa ad U collegata ad un sostegno verticale. Il filo, passante nella gola della puleggia, è teso mediante un peso opportuno posto su un piatto attaccato al suo estremo.

Il sostegno del dispositivo di vincolo V_2 è poi montato su di un sistema di guide e slitte ortogonali disposte orizzontalmente per effettuare spostamenti paralleli o perpendicolari all'asse s . Questi spostamenti, sia per V_1 che per V_2 , sono rilevati su scale millimetriche dotate di noni ventisimati.

Va poi aggiunto che cure particolari furono usate nella costruzione delle parti ora descritte a fine di ottenere una ottima equilibratura statica delle rotelle e delle puleggie e per minimizzare l'attrito tra perni e sedi.

Descriveremo ora il sistema di rilievo delle traiettorie uscenti dalla lente Q_N . Su di una rigida incastellatura (costruita in laminati di ottone) è montata una lastra rettangolare di vetro a facce piane e parallele (spes

sore 0.5 cm) che può essere accuratamente disposta in un piano orizzontale parallelo al P.M. ma ad una quota più elevata.

Su di essa viene distesa e fissata con nastro adesivo una striscia di carta da lucidi. Sotto la lastra di vetro un proiettore P' a fascio di luce parallelo, con l'asse disposto verticalmente, permette di proiettare sul foglio di carta l'ombra del filo, il quale si sviluppa sul P.M. della lente sito a circa 0.5 cm al disotto della faccia inferiore della lastra di vetro. L'ortogonalità del fascetto di luce al piano della lastra è particolarmente curata per evitare effetti di doppia rifrazione attraverso la lastra di vetro che possono dar luogo a spostamenti dell'ombra del filo. Con questo dispositivo è possibile così proiettare sulla carta tratti diversi del filo uscente dalla lente quadrupolare.

Per quanto riguarda la misura degli angoli del filo rispetto all'asse s , all'ingresso della lente, questa fu effettuata col metodo di leva ottica sfruttando lo specchietto S_p posto nell'asse della rotella interna di \mathcal{W}_1 . Il proiettore P (fig. 2-b) consente di proiettare un reticolo a fili incrociati su S_p . L'immagine da questo riflessa è messa a fuoco sulla scala millimetrica S_c posta a ~ 100 cm dallo specchio.

Il sistema di alimentazione del filo è costituito da accumulatori di bassa tensione e grande capacità. Nel circuito sono poi inserite resistenze variabili di regolazione sia grossa che fine.

Una lettura diretta e approssimata della corrente i è effettuata mediante un milliamperometro, mentre per una lettura più accurata, si è misurata, con potenziometro Leeds e Northrop, la caduta di f. e. m. ai capi di una resistenza standard ($2 \Omega \pm 0.1\%$) inserita nel circuito di alimentazione.

D) - VALUTAZIONE DEGLI EFFETTI PERTURBATORI -

Prima di passare alla valutazioni degli effetti perturbatori elencati al punto 3) del B, riteniamo utile raccogliere i dati relativi alle particelle le cui traiettorie venivano simulate e quelli relativi al filo conduttore usato nell'odoscopia.

Si ha:

a) per le particelle (mesoni π^{\pm})^(x):

(x) - I valori di T, p, (B ρ) riportati sono quelli per i quali fu effettuata la maggior parte delle misure con l'odoscopia; essi differiscono di poco dai valori corrispondenti assunti per il funzionamento standard del dispositivo $Q_1 + Q_2 + M$. Detti valori standard, sono:

$$T = 75 \text{ MeV}, \quad p = 163 \text{ MeV}/c, \quad (B \rho) = 5.437 \times 10^5 \text{ gauss} \times \text{cm}$$

12.

- Energia di riposto: $E_0 = 139.65 \text{ MeV}$
- carica: $q = 1 \text{ carica elementare}$
- energia cinetica: $T = 80 \text{ MeV}$
- Impulso: $p = 170 \text{ MeV}/c$
- Rigidità magnetica: $(B \rho) = 5.668 \times 10^5 \text{ gauss.cm}$

(I valori di $T, p, (B \rho)$ sono riferiti al valore centrale della banda di energia selezionata dai magneti).

b) - per il filo:

- Materiale: filo di rame nudo
- Diametro: $d_f = 5 \times 10^{-2} \text{ mm.}$
- Sezione: $S_f = 19.6 \times 10^{-4} \text{ mm}^2$
- Peso per unità di lunghezza: $\lambda = 17.8 \times 10^{-3} \text{ gp/m}$
- Carico di rottura a trazione: $\sigma_R = 28 \times 10^3 \text{ gp/mm}^2$
- Modulo normale di Young: $E = 12 \times 10^6 \text{ gp/mm}^2$

Per la simulazione delle particelle con le caratteristiche date in a), si è operato nelle condizioni seguenti^(x):

- Tensione applicata al filo: $T = 23.440 \text{ gp.}$
- Intensità di corrente: $i = 405.24 \text{ mA}$

Con questi valori risulta:

- Sollecitazione unitaria di trazione: $\sigma = T/S_f = 12 \times 10^3 \text{ gp/mm}^2$
- Densità di corrente: $j = i/S_f = 205 \text{ A/mm}^2.$

Queste condizioni di lavoro del filo possono ritenersi soddisfacenti sia per quanto riguarda le sollecitazioni meccaniche che termiche. A questo riguardo va tenuta presente la grande capacità di dissipazione di calore Joule del filo a ragione del suo piccolo diametro. Con la densità di corrente suddetta ed in condizioni di regime il filo risultò praticamente a temperatura ambiente⁽⁺⁾.

Premessi questi dati, passiamo all'analisi ed alla valutazione dei diversi effetti perturbatori.

(x) - Questi valori sono stati dedotti utilizzando la (3') (o (5')).

(+) - Ciò contribuisce ad eliminare una causa di errore perchè se la temperatura del filo è elevata, possono manifestarsi nelle sue adiacenze correnti d'aria convettive, il cui effetto sul filo stesso può, almeno in prima approssimazione, ritenersi corrispondente ad una variazione della tensione T applicata, e quindi dell'impulso simulato.

1°) - Irraggiamento emesso dalla particella. -

E' ovvio che se l'irraggiamento emesso dalla particella non è trascurabile, la sua traiettoria effettiva andrà progressivamente discostandosi rispetto quella indicata dall'odoscopio. Una stima dell'ordine di grandezza di questo effetto può farsi considerando la riduzione percentuale del raggio di curvatura della traiettoria effettiva nell'attraversamento della distribuzione di campo (che per semplicità supporremo uniforme e stazionaria). Tale riduzione è legata alla diminuzione di energia cinetica δT , dovuta all'irraggiamento, dalla relazione^(x):

$$(6) \quad \frac{\delta p}{p} = \left(\frac{1 + T/E_0}{2 + T/E_0} \right) \frac{\delta T}{T}$$

Per stimare δT , si può assumere:

$$(7) \quad \delta T = \frac{\varphi}{2\pi} L$$

essendo φ è la deflessione angolare subita dalla particella attraverso la regione di campo (supposto omogeneo) ed L è l'energia che essa irraggerebbe in un giro completo in campo di pari intensità. Questa ultima energia può essere valutata per mezzo della relazione⁽⁶⁾:

$$(8) \quad L = \frac{6.05 \times 10^{-9}}{p} \left(1 + \frac{T}{E_0} \right)^4 \quad (\text{eV, m})$$

Con i dati relativi ai π^+ già forniti, ed assumendo pessimisticamente^(*):

(x) - La (6) deriva immediatamente dalle relazioni seguenti:

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta p}{p} \quad (\text{valida per } B = \text{cost}), \quad e: (pc)^2 = T^2 + 2 T E_0$$

(*) - Si osservi infatti che le deflessioni angolari max si possono assumere pari a $\sim 15^\circ$ nelle lenti Q_N e $\sim 35^\circ$ nel magnete M. Inoltre, nel corso delle misure svolte i campi massimi si possono valutare pari a ~ 7000 gauss nelle lenti e inferiori a 5000 gauss nel magnete.

14.

$\varphi_{\text{MAX}} = 45^\circ$, $B_{\text{MAX}} = 10^4$ guass, e quindi per la (4'): $\rho_{\text{MIN}} \approx 55$ cm, si può stimare:

$$(9) \quad \left(\frac{\sigma \rho}{\rho} \right)_{\text{max}} < 10^{-8}$$

L'effetto è quindi del tutto trascurabile;

2°) - Forze sul filo dovute alla vicinanza delle espansioni polari. -

Considereremo prima il caso delle lenti Q_N . Queste forze possono essere valutate con buona approssimazione considerando le interazioni della corrente nel filo con le sue immagini magnetiche del 1° ordine rispetto ad ognuna delle 4 espansioni polari. Allo scopo di semplificare i calcoli di stima dell'effetto, assumeremo poi che:

- la configurazione del filo sul P.M. non sia curva, ma rettilinea e parallela all'asse s .
- la permeabilità magnetica relativa del ferro si possa considerare infinita ($\mu_r = \infty$).
- la geometria dei contorni magnetici sia quella della fig. 4-a) (iperboli approssimate con cerchi di raggio $R = 1.15 a$).

Con queste ipotesi si dimostra (cfr. App. A.2) che la risultante dF_M delle forze elementari, dovute alla vicinanza delle 4 espansioni polari, sul tratto $d\sigma$ di filo è sempre contenuta nel P.M. e la sua intensità può calcolarsi con la relazione:

$$(10) \quad dF_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i^2}{a} f(x/a) \cdot d\sigma$$

nella quale $f(x/a)$ è una funzione adimensionale che esprime la dipendenza di dF_M dalla distanza x dell'asse del quadrupolo. La $f(x/a)$ è stata calcolata numericamente per il caso $R/a = 1.15$ ed è riportata in fig. 4-b).

Ora, l'intensità della forza laplaciana agente sul tratto $d\sigma$ di filo, è:

$$(11) \quad dF_L = i B d\sigma = i G a \left(\frac{x}{a} \right) d\sigma,$$

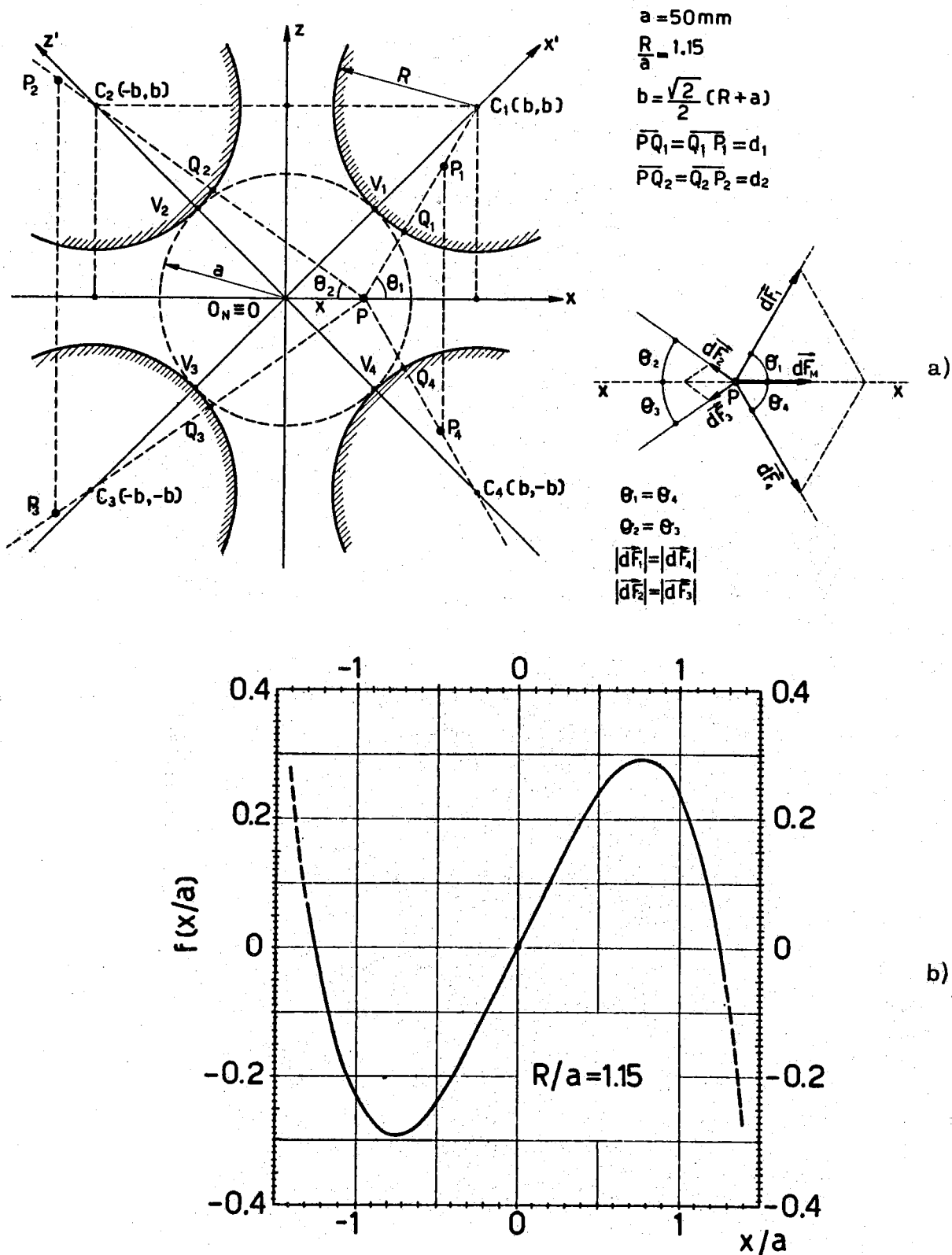


FIG. 4 - a) - Geometria del traferro assunto per la stima delle azioni sul filo dell'odoscopio dovute alla vicinanza delle espansioni polari in una lente Q_N .
 b) - Funzione che rappresenta, nel P.M., la dipendenza delle azioni anzidette sul filo dalla distanza x dall'asse ottico del quadrupolo.

pertanto il rapporto tra le due forze (10) e (11) si può scrivere:

$$(12) \quad \frac{dF_M}{dF_L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{G a^2} \frac{f(x/a)}{(x/a)}$$

Una valutazione numerica di tale rapporto può essere effettuata considerando che $f(x/a)/(x/a)$ aumenta monotamente per $(x/a) \rightarrow 0$, tendendo al valore limite 0,5. Assumendo poi pessimisticamente un valore minimo del gradiente $G_{\text{MIN}} = 200 \text{ gauss/cm}^{(x)}$, si ha (per $0 < x < a$):

$$(13) \quad \frac{dF_M}{dF_L} < 10^{-5}$$

Riassumendo, nella situazione considerata (filo sul P.M.), le forze dovute alla presenza dei contorni magnetici sono sempre contenute sul P.M. stesso e di intensità trascurabile rispetto alle forze laplaciane. Questo stato di cose può cambiare notevolmente se il filo viene per qualche causa allontanato dal P.M. in quanto le azioni su di esso si disimmiettizzano progressivamente, tanto che esso può venire violentemente attratto dall'espansione polare più vicina.

Per ciò che riguarda il magnete analizzatore si può osservare che per un filo sul P.M., a causa della simmetria delle azioni delle correnti immagini nei due poli, è su ogni elemento $d\sigma$ del filo: $dF_M = 0$, mentre nel caso del filo non contenuto nel P.M. valgono considerazioni analoghe alle precedenti.

3^o) - Peso proprio del filo. -

Cercheremo ora di spiegare e stimare gli effetti dovuti al peso proprio del filo. Supponiamo che il filo conduttore usato per l'odoscopio abbia un peso per unità di lunghezza pari a λ e che tutti gli altri effetti elencati al punto 3) del B si possono trascurare. Per ciò che riguarda la distribuzione di campo supponiamo che essa ammetta un P.M. e inoltre che, almeno per punti non troppo distanti da esso, si possa assumere che l'induzione magnetica, pur dipendendo dal particolare punto scelto, sia sempre diretta

(x) - Tale valore si raggiunge in entrambe le lenti per $I_N < 40 \text{ amp.}$

verticalmente^(x). Consideriamo ora il filo suddetto in una condizione di equilibrio stabile corrispondente ad una tensione T e ad un valore i della corrente. Esso attraversando la distribuzione di campo, assumerà tra i punti di vincolo V_1 e V_2 (disposti sul P.M.) una configurazione non piana \mathcal{C} , la cui proiezione verticale sul P.M. è rappresentata dalla curva \mathcal{C}' di fig. 5.

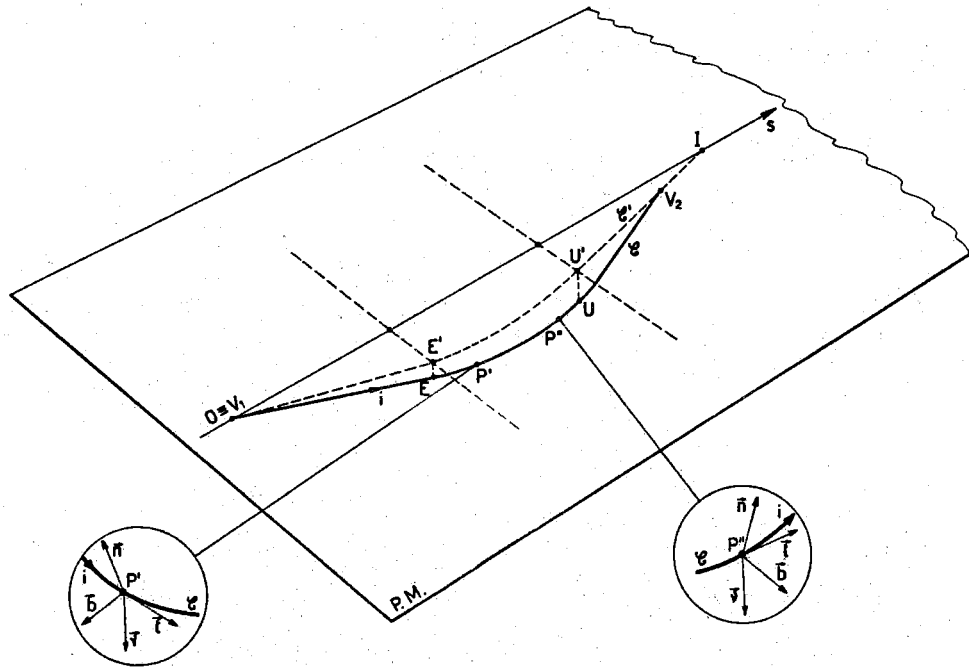


FIG. 5 - Configurazione effettiva assunta dal filo durante il rilievo di traiettorie in una lente Q_N . La configurazione \mathcal{C}' corrisponde ad un filo ideale senza peso. Sono rappresentate, in due punti distinti di \mathcal{C} le effettive disposizioni nello spazio della terna intrinseca alla curva.

(x) - Ciò significa che, nei punti considerati, la componente orizzontale di \vec{B} può considerarsi trascurabile rispetto alla componente verticale. Ad esempio, per le lenti Q_N questa condizione si potrà ritenere soddisfacente per tutti i punti per i quali risulta $B_x < 10^{-2} B_z$, ossia (tenuto conto che $B_x = Gz$, $B_z = Gx$) per i punti per i quali è $z < 10^{-2} x$. Se si desidera che il filo rimanga sempre immerso nella regione di validità di questa ipotesi, detta f la sua freccia massima, basterà che risulti $x < 10^2 f$, ossia, ad es. per $f \approx 0.1$ mm, $x < 10$ mm. Per il magnete M , esistono sul P.M., e solamente verso le estremità del traferro, gradienti di campo notevolmente più piccoli, si potrà perciò considerare valida l'ipotesi, anche in punti assai distanti dal P.M.

Se si indica con \vec{v} il versore della verticale (orientato verso il basso) e si suppone che in tutti i punti della curva \mathcal{C} valga l'ipotesi prima fatta sull'orientamento di \vec{B} , l'equazione dell'equilibrio del filo può scrivere:

$$(14) \quad \frac{dT}{d\sigma} + i B \vec{t} \wedge \vec{v} + \lambda \vec{v} = 0,$$

nella quale \vec{t} è il versore della tangente appartenente alla terna \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} intrinseca alla curva orientata \mathcal{C} . Posto:

$$(15) \quad \widehat{\vec{v}, \vec{t}} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \widehat{\vec{v}, \vec{n}} = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \widehat{\vec{v}, \vec{b}} = \gamma$$

gli angoli compresi tra \vec{v} ed i versori suddetti^(x), si può dimostrare (cfr. App. A. 3) che la (14) corrisponde alle seguenti equazioni scalari:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{d\sigma} + \lambda \operatorname{sen} \alpha = 0 \\ \frac{T}{\rho} - i B \cos \gamma + \lambda \operatorname{sen} \beta = 0 \\ i B \operatorname{sen} \beta + \lambda - \cos \gamma = 0 \end{array} \right.$$

Ad esse deve poi essere aggiunta la ovvia relazione tra i coseni direttori di \vec{v} rispetto alla terna intrinseca^(x):

(x) - Gli angoli α , β , γ , che risultano ovviamente funzioni della ascissa curvilinea σ lungo \mathcal{C} , pur rimanendo sempre piccoli in valore assoluto, possono assumere valori $\gtrsim 0$. Si osservi poi che per $\lambda = 0$, risulta $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ (cfr. fig. 5), quindi:

$$\widehat{\vec{v}, \vec{t}} = \frac{\pi}{2}; \quad \widehat{\vec{v}, \vec{n}} = \frac{\pi}{2}; \quad \widehat{\vec{v}, \vec{b}} = 0, \quad \text{ossia: } \alpha = \beta = \gamma = 0$$

(x) - Si osservi che la (17) e la terza delle (16) consentono, supposta nota la funzione $\alpha = \alpha(\sigma)$, di determinare le funzioni $\beta(\sigma)$ e $\gamma(\sigma)$. Infatti da queste relazioni si ricava facilmente:

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \left(\frac{iB}{\lambda}\right)^2} \quad \cos^2 \gamma = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \left(\frac{\lambda}{iB}\right)^2}$$

Queste relazioni saranno utilizzate nel seguito.

$$(17) \quad \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Le prime due equazioni (16) meritano di essere esaminate con cura nel loro significato; esse mostrano infatti due aspetti distinti nella perturbazione introdotta dal peso proprio del filo.

La prima equazione ci mostra che la tensione lungo il filo non è più costante come nel caso $\lambda = 0$. Infatti, posto $z = z(\sigma)$ lo scostamento verticale del filo al disotto del P.M., ed osservato che $\text{sen} \alpha = dz/d\sigma$, l'equazione in esame diviene:

$$(18) \quad \frac{dT}{d\sigma} + \lambda \cdot \frac{dz}{d\sigma} = 0$$

che integrata da la legge di variazione della tensione lungo il filo:

$$(19) \quad T(\sigma) = - \lambda \cdot z(\sigma) + \text{cost} .$$

Una valutazione approssimata della variazione max di T lungo il filo può farsi nel modo seguente. Sostituiamo alla configurazione reale una configurazione piana \mathcal{C}'' di lunghezza pari a quella di \mathcal{C} ($L = \sigma_{V2} - \sigma_{V1}$), sospesa tra due punti posta alla stessa quota, realizzata con filo avente lo stesso valore di λ e teso agli estremi con la stessa tensione T. Allora, in questo caso (filo fortemente teso agli estremi rispetto al suo peso totale) la configurazione \mathcal{C}'' che il filo assume è rappresentata da un arco di parabola⁽⁷⁾ di equazione^(x):

$$(20) \quad z = \frac{\lambda}{2T} \xi^2$$

Pertanto la freccia max del filo ed il valore max di α (che si ha nei punti estremi di sospensione) risultano dati dalle relazioni:

$$(21) \quad f = \frac{\lambda L^2}{8T}$$

$$(22) \quad |\text{sen} \alpha|_{\text{MAX}} = \frac{\lambda L}{2T \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda L}{2T}\right)^2}} \approx \frac{\lambda L}{2T}$$

(x) - Nella (20) gli assi ortogonali z, ξ sono presi con origine nel vertice dell'arco di parabola assunto dalla \mathcal{C}'' e contenuti nello stesso piano di questa.

Dalla (19) si ha quindi per la variazione max di T lungo il filo.

$$(23) \quad |\Delta T|_{\text{MAX}} = \lambda |\Delta Z|_{\text{MAX}} = \lambda f = \frac{\lambda^2 L^2}{8 T^2}$$

Possiamo ora tentare di valutare numericamente le grandezze suddette, per le lenti Q_N e per il magnete M, assumendo per λ e T i dati riportati all'inizio del presente paragrafo. Assumendo in condizioni pesimistiche^(x): $L = 1,5$ m, si ha:

$$f = 0.2 \text{ mm}, \quad |\alpha|_{\text{MAX}} \approx 0.6 \text{ mrad}, \quad \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{MAX}} \approx 2 \times 10^{-7}$$

Consideriamo ora la seconda delle equazioni (16); essa mostra che la condizione: $T/i = (B \rho)$ (cfr. (5) ed App. A-1) non è esattamente verificata nel caso $\lambda \neq 0$. Nella ipotesi, praticamente ben soddisfatta, in cui: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \gamma \approx 1 - \gamma^2/2$, la 2^a delle (16) diviene:

$$(24) \quad \frac{T}{i} = (B \rho) - \left\{ (B \rho) \cdot \frac{\gamma^2}{2} + \left(\frac{\lambda \rho}{i}\right) \cdot \beta \right\}$$

che deve essere sostituita alla (5) nel caso $\lambda \neq 0$. Lo scarto percentuale massimo rispetto alla situazione ideale $\lambda = 0$ risulta dato pertanto da:

$$(25) \quad \epsilon_{\text{MAX}} = \frac{\gamma_{\text{MAX}}^2}{2} + \left(\frac{\lambda}{i B_{\text{MIN}}}\right) \cdot \beta_{\text{MAX}}$$

Una valutazione approssimata dei valori massimi di β e γ può essere fatta utilizzando le relazioni fornite a piè di pag. 18.

Da queste, assumendo $\sin^2 \alpha \approx 0$, si ricava infatti:

$$(26) \quad \beta_{\text{MAX}} \approx \left\{ \frac{1}{i B_{\text{MIN}}^2} \right\}^{1/2}; \quad (27) \quad \frac{\gamma_{\text{MAX}}^2}{2} \approx 1 - \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{i B_{\text{MIN}}}\right)^2} \right\}^{1/2}$$

(x) - Nelle condizioni effettive di funzionamento dell'odoscopio risultò:
 $L \approx 1$ m per i quadrupoli, e $L \approx 1.5$ m per il magnete.

Assumendo $B_{\text{MIN}} = 500$ gauss e per λ il valore consueto si trova che $\epsilon_{\text{MAX}} < 10^{-4}$, cioè la (5) è nel nostro caso approssimata meglio di $1/10^4$.

4^o) - Valutazione dell'effetto dovuto alla rigidità del filo. -

E' stato dimostrato da R. N. Carlile⁽⁸⁾ che, considerando il filo come una sottile trave elastica, si può tener conto di tutte le forze elastiche dovute alla rigidità e diverse dalla tensione, introducendo una forza di scorrimento dT_s , agente sul tratto $d\sigma$ di filo e diretta normalmente ad esso. Inoltre, per un filo nel piano convergente di un quadrupolo, si può scrivere il rapporto tra la forza di scorrimento e la forza amperiana nel modo seguente:

$$(28) \quad \frac{dT_s}{dF_L} = \frac{E I G}{(B \rho)^2 i}$$

dove $I = \pi d^4/64$ è il momento di inerzia della sezione del filo rispetto ad un diametro ed E è il modulo normale di Young. Assumendo in un caso pessimistico $G = 1300$ gauss/cm e per le altre grandezze i valori dati all'inizio del presente paragrafo, si ha:

$$(29) \quad \frac{dT_s}{dF_L} < 5 \times 10^{-14}$$

Risulta quindi completamente trascurabile l'effetto della rigidità del filo. Riguardo all'estensibilità del filo, va osservato che, anche nel caso in cui il filo a causa delle tensioni possa rimanere elasticamente o permanentemente allungato, una volta raggiunta la configurazione \mathcal{C} di equilibrio, non viene introdotto alcun errore nel rilievo della \mathcal{C} corrispondente. Infatti la lunghezza della \mathcal{C} tra V_1 e V_2 , è, nel nostro odoscopio con filo a lunghezza libera, determinata solo dalle forze agenti sul filo stesso.

5^o) - Valutazione dell'errore introdotto nella determinazione della tensione applicata al filo dell'attrito del perno della puleggia. -

L'effetto che qui consideriamo non è compreso tra quelli elencati al punto 3) del B, ma è caratteristico del particolare tipo di odoscopio scelto.

Come abbiamo descritto nel C, nel dispositivo di vincolo V_2 del filo la conversione del peso in tensione orizzontale è realizzata mediante

una puleggia il cui asse è imperniato in opportune sedi della staffa di sostegno registrabili mediante viti (cfr. fig. 3-b). Vogliamo qui valutare lo errore sistematico, introdotto dall'attrito tra l'asse orizzontale della puleggia e le sedi relative, nella conoscenza della tensione T applicata al filo. Osserveremo anzitutto che ciò che non consente al filo di assestarsi nella configurazione ideale di equilibrio, a partire da una configurazione lievemente diversa, è l'attrito di distacco^(x). Esso si manifesta nel fatto che per mettere in rotazione la puleggia a partire dalla quiete è necessario applicare una coppia di momento di poco superiore ad un certo valore minimo (coppia di avvio). La stima di questo effetto nelle condizioni di operazione del filo (cfr. fig. 6-a) può essere effettuata sperimentalmente nel modo che descriviamo⁽⁹⁾. Si dispone il filo nella gola della puleggia come mostra nella fig. 6-b, e si appende ad uno dei due tratti verticali una tara T_A (pari all'incirca alla tensione T che si vuole applicare); all'altro tratto del filo è appeso un piatto sul quale si collocano dei pesi.

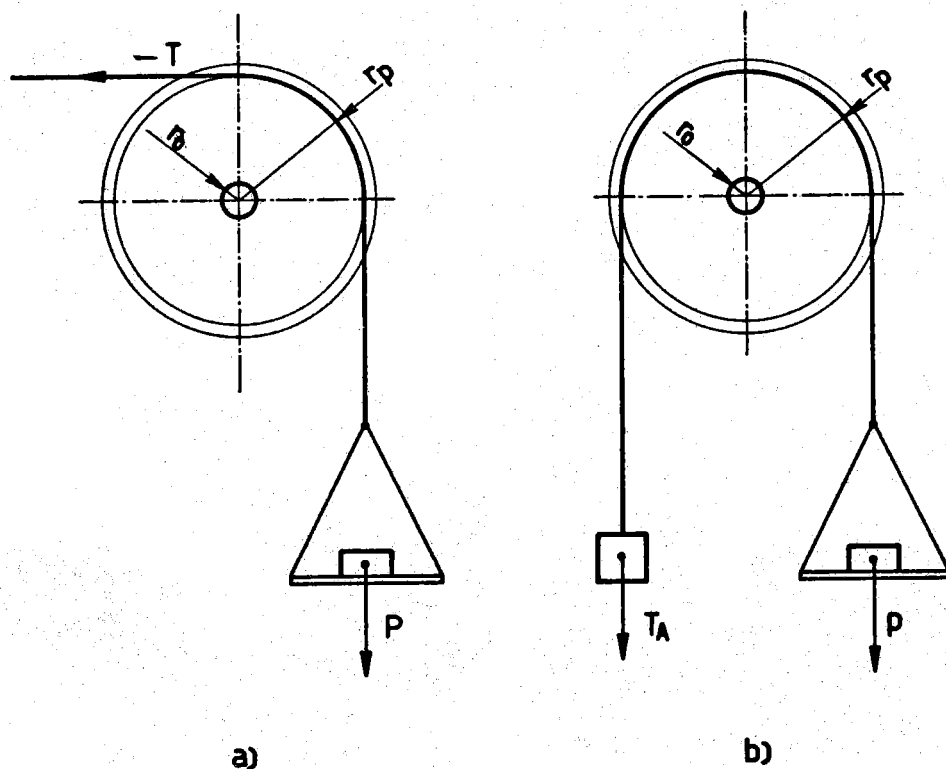


FIG. 6 - Disposizione del filo dell'odoscopio rispetto alla puleggia del dispositivo di vincolo \mathcal{V}_2 .

- a) - Nelle condizioni di lavoro dell'odoscopio
 b) - Nella determinazione sperimentale dell'influenza dell'attrito del perno della puleggia.

(x) - Si osservi che l'attrito tra il filo e la puleggia è assai più considerevole di quella esistente tra l'asse della puleggia e le relative sedi, pertanto in pratica, al variare delle tensioni applicate al filo, si manifesteranno solo rotazioni della puleggia senza alcun scorrimento del filo rispetto ad essa.

Si pone inizialmente un peso troppo piccolo per avere l'equilibrio e lo si aumenta gradualmente (ad esempio aggiungendo 10 mg per volta). Si rileva così l'ultimo peso p_1 per cui il piatto sale. Si continua poi ad aggiungere pesi sul piatto fino a raggiungere il primo peso p_2 per il quale il piatto scende. Si dimostra allora (cfr. App. A-4) che per l'errore sistematico ϵ (in %) introdotto dall'attrito nella situazione effettiva delle misure (fig. 6-a), è possibile scrivere la limitazione seguente:

$$(30) \quad \epsilon < \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{p_2 - p_1}{T} \right)$$

Stime di ϵ con questo metodo furono eseguite all'inizio di ogni gruppo di misure e dopo aver registrato le sedi dei perni. Ciò perchè le variazioni di pressione tra le sedi ed il perno della puleggia possono variare le condizioni di attrito e quindi il valore di ϵ . In tutte le determinazioni di $p_2 - p_1$ eseguite, si è sempre trovato $p_2 - p_1 < 60$ mgp, pertanto con $T = 23.440$ gp, risulta per la (30):

$$(31) \quad \epsilon < 10^{-3}$$

Questo è il limite superiore dell'errore da cui si ritiene affetta la conoscenza del valore di T a partire dalla misura del peso attaccato al filo tramite la puleggia.

In pratica poi questo effetto dovuto all'attrito, può essere in gran parte ridotto facendo compiere al filo piccole oscillazioni attorno alla sua posizione di equilibrio.

E) - DESCRIZIONE DELLE MISURE EFFETTUATE -

1°) - Prima di descrivere la filosofia delle misure svolte, le modalità di esecuzione e presentare i risultati ottenuti, riassumeremo brevemente la messa a punto del dispositivo sperimentale e stimeremo le incertezze sui valori rilevati delle grandezze direttamente misurate.

La prima operazione effettuata prima dell'inizio delle misure fu l'allineamento del magnete (lente Q_N o analizzatore M) rispetto alle varie parti dell'odoscopio. Il magnete scelto fu montato sul suo banco di slitte dotato degli opportuni spostamenti indipendenti atti a facilitarne l'allineamento^(x); questo banco fu poi disposto, insieme ai componenti dell'odosco-

(x) - Gli spostamenti effettuabili sono descritti nella parte I^a, C e D.

pio su blocchi di calcestruzzo. Effettuata questa operazione, si cercò, utilizzando gli spostamenti suddetti, di realizzare quanto più accuratamente possibile le condizioni seguenti^(x):

- a) - giacitura orizzontale del P.M. dei magneti,
- b) - allineamento lungo l'asse ottico s dei punti V_1 e V_2 dei dispositivi V_1 V_2 di vincolo del filo,
- c) - giacitura orizzontale e parallela (o ortogonale) ad s delle slitte su cui scorrono i dispositivi di vincolo suddetti,
- d) - giacitura orizzontale della lastra di vetro usata per la proiezione delle traiettorie,
- e) - disposizione verticale dell'asse del proiettore P' (da conservare anche durante gli spostamenti del proiettore).

I procedimenti di allineamento, gli strumenti usati e le precisioni conseguite sono descritti in dettaglio nella App. A-5.

Stimeremo ora le incertezze sui valori delle grandezze direttamente misurate rimandando a più oltre le analoghe stime per le altre grandezze.

Con riferimento alla descrizione dell'odoscopio (cfr. C) ed alle figg. 7 a), b) e 8 si può dire che la posizione del punto oggetto V_1 rispetto all'asse s ed al bordo geometrico del magnete fu determinata con incertezza max: $\delta x_0 = \pm 0.1$ mm e $\delta (OE) = \pm 0.2$ mm, mentre l'angolo del filo rispetto ad s all'entrata in Q_N fu determinato, mediante la leva ottica, con incertezza max $\delta x'_0 = \pm 3'$.

Il rilievo delle traiettorie uscenti è effettuato mediante il proiettore P' avendo cura di non rilevare punti delle traiettorie troppo vicini al bordo di uscita della lente del magnete in quanto, per effetto del campo disperso, le traiettorie stesse presentano uno sviluppo non rettilineo. Gli spostamenti x ed \bar{x} del filo rispetto all'asse s sono rilevati a due diverse distanze S_0 ed $S_0 + S$ dietro il bordo d'uscita del magnete in misura, e le relative incertezze δx , $\delta \bar{x}$, δS_0 , $\delta (S_0 + S)$ si possono assumere pari a ± 0.25 mm.

La determinazione della corrente nel filo può essere fatta, usando il metodo descritto al C, con una incertezza max di $\pm 0.1\%$, mentre il peso P applicato al filo è determinato con una bilancia di precisione (costruzione Sartorius Werke A. G.) avente una sensibilità max di 0.1 mgp. La grandezza delle indeterminate massime nella conoscenza della tensione effetti-

(x) - Queste condizioni furono sempre controllate all'inizio di ogni gruppo di misure.

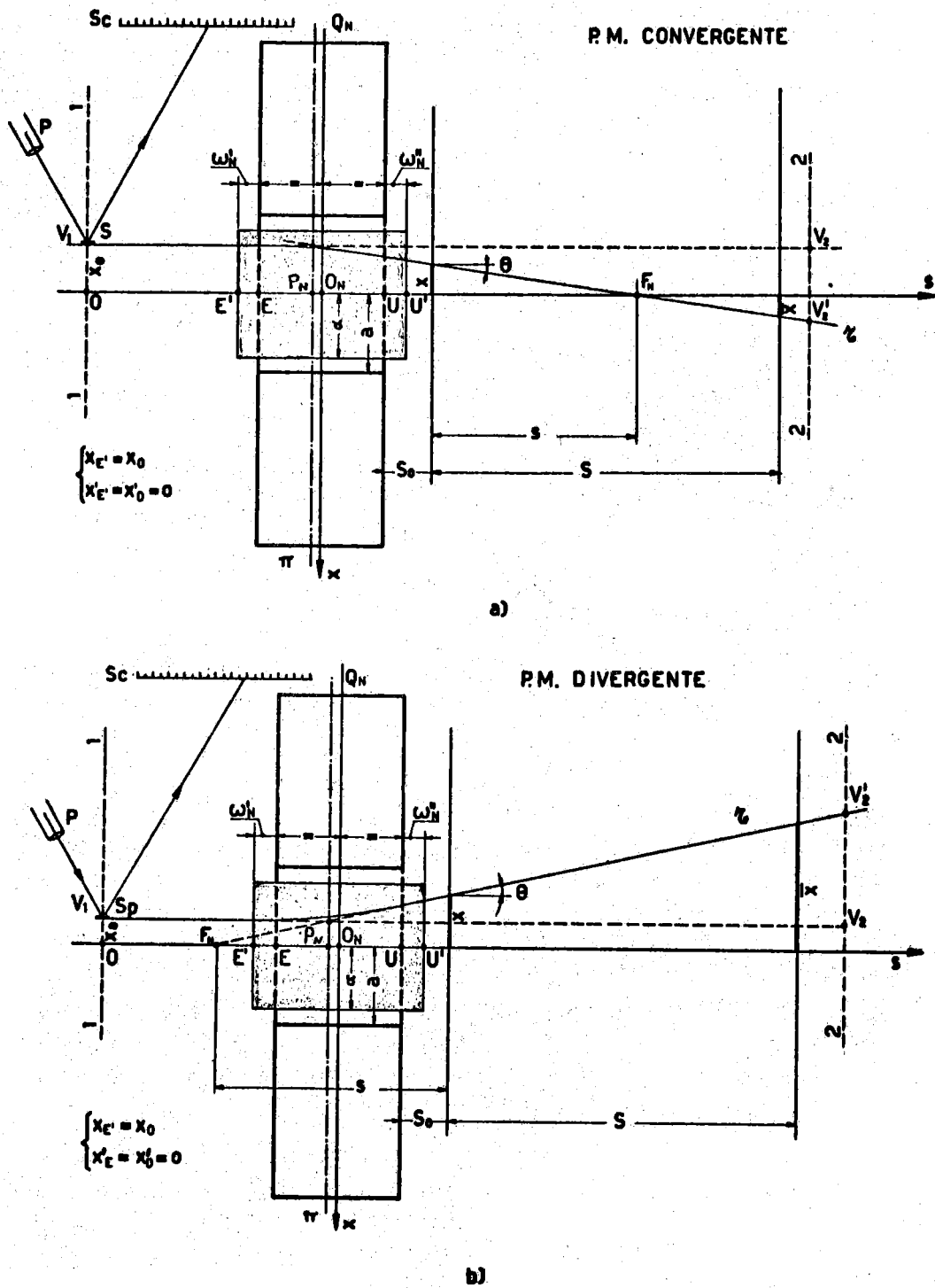


FIG. 7 - Disposizione geometrica del rilievo delle traiettorie attraversante la lente Q_N con direzione iniziale parallela all'asse s .
 a) - Caso in cui Q_N è convergente sul P.M. ($k_N > 0$)
 b) - Q_N è divergente su P.M. ($k_N < 0$).

vamente applicata al filo è però in effetti stabilità dell'attrito dei perni della puleggia (cfr. D-5)^(x). In definitiva si può stimare $\delta T/T \approx 0.1\%$. In conseguenza di ciò si può valutare l'errore max nella determinazione di p (o di $(B \rho)$) pari a $\sim \pm 0.2\%$. Tenendo conto infine che l'errore nella misura assoluta del gradiente G_N di un quadrupolo è inferiore a $\pm 0.4\%$ (cfr. Parte II^a, D) si può concludere che la costante $k_N = G_N / (B \rho)$ di una lente è individuata entro $\sim \pm 0.6\%$.

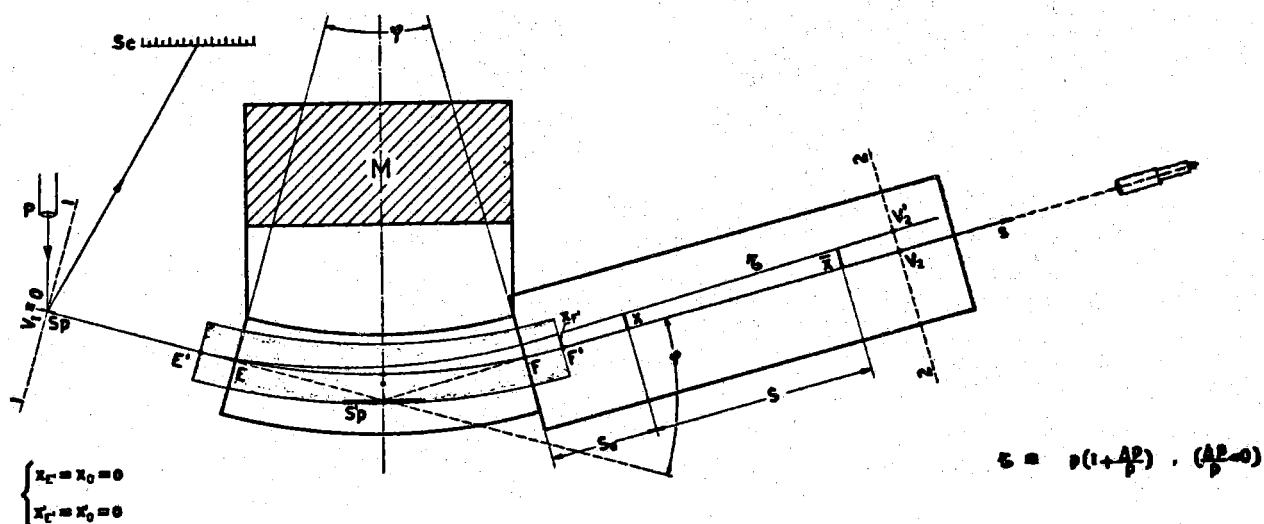


FIG. 8 - Disposizione geometrica per l'allineamento dei punti di vincolo del filo sull'asse ottico ed il rilievo delle traiettorie nel magnete M.

Tutte le misure effettuate con l'odoscopio furono eseguite nel P.M. delle lenti Q_N e del magnete M. Per le lenti, invertendo il verso delle correnti di eccitazione per un verso fissato della corrente nel filo (o viceversa) fu possibile ottenere sul P.M. effetti focalizzanti o defocalizzanti. I risultati più significativi delle misure svolte sono rappresentati nelle figg. da 10 a 13.

2^o) - Le misure sulle lenti Q_N consistettero nel rilevare le traiettorie ζ di particelle aventi rigidità magnetica $(B \rho)$ fissata e direzione di ingresso nella lente parallela all'asse ottico (cfr. figg. 7a) e b)). Gli scopi di queste misure si possono così riassumere:

(x) - A questo errore deve aggiungersi, a rigore, quello dovuto alle variazioni del tratto verticale di filo dopo la puleggia che si hanno in conseguenza delle variazioni di lunghezza delle traiettorie simulate. Assumendo 0.4 m per il valore max di questa variazione, si può stimare una variazione percentuale max di T , pari a 3×10^{-4} e pertanto trascurabile.

a) - determinare, in funzione di l_N , la distanza $l_N = \overline{UF_N}$ tra il bordo d'uscita geometrico della lente ed il fuoco immagine F_N (reale o virtuale a seconda che la costante della lente $k_N = G_N/(B \rho)$ è positiva o negativa).

b) - determinare, sempre in funzione di l_N , la distanza focale immagine $f_N = P_N F_N$ (reale o virtuale) della lente.

c) - controllare, per diversi l_N fissati, l'eventuale dipendenza della posizione sull'asse s di F_N dalla distanza x_0 della ζ entrante dall'asse s stesso (controllo dell'aberrazione di sfericità della lente).

Si osservi che la conoscenza delle informazioni di cui ai punti a) e b) vale a determinare le proprietà ottiche del 1° ordine di una lente Q_N . Infatti, noti f_N ed l_N è possibile sempre determinare la posizione del piano principale corrispondente^(x). Inoltre, data la simmetria delle lenti rispetto al suo centro geometrico $O_N^{(+)}$, le posizioni dei fuochi e dei piani principali (oggetto ed immagine) risultano simmetriche rispetto al centro stesso.

Il rilievo diretto di queste quantità permette poi di controllare le previsioni sul comportamento ottico delle lenti effettuate sulla base del "modello rettangolare efficace" dedotto dalla distribuzione rilevata del campo magnetico (cfr. Parte II^a, C-1°, E-3°). Infatti, è possibile, a partire dalle equazioni del 1° ordine delle traiettorie valide in questa distribuzione approssimata del campo scrivere, tenendo conto delle condizioni iniziali e finali, le relazioni seguenti^(o):

(x) - Infatti la distanza $\overline{P_N U}$ tra piano principale immagine e il bordo di uscita della lente è, a parte il segno, data dalla differenza $f_N - l_N$.

(+) - Sulla base delle misure magnetiche effettuate (cfr. Parte II°, D) si può dire che la simmetria della distribuzione di campo rispetto ad O_N , si, mantiene assai ben rispettata fino a ~ 200 amp per Q_1 e fino a ~ 300 per Q_2 .

(o) - Ad es., per $k_N > 0$, dalle (15) della Parte II^a, ponendo:

$$x'_0 = 0, \quad s_0 = s_{E'} = -\frac{\lambda_N}{2}, \quad s = s_{U'} = +\frac{\lambda_N}{2}, \quad \text{si ricava:}$$

$$x_{U'} = x_0 \cos(\sqrt{k_N} \cdot \lambda_N), \quad x'_{U'} = -x_0 \sqrt{k_N} \sin(\sqrt{k_N} \cdot \lambda_N).$$

Tenuto conto (cfr. fig. 7a) b)) che è: $x_{U'} = (l_N - \omega''_N) \cdot x'_{U'}$, $x_0 = f \cdot x'_{U'}$, è possibile ricavare le (32, 32'). Nelle (32, I^a) (32' I^a), ω''_N rappresenta la distanza del bordo equivalente dal bordo geometrico della lente alla sua uscita.

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_N = \overline{UF}_N = \frac{1}{\sqrt{k_N}} \cotg (\sqrt{k_N} \lambda_N) + \omega''_N \\ f_N = \overline{P_N F}_N = \frac{1}{\sqrt{k_N} \operatorname{sen} (\sqrt{k_N} \lambda_N)} \end{array} \right. \quad (\text{per } k_N > 0)$$

$$(32') \quad \left\{ \begin{array}{l} l_N = \overline{UF}_N = -\frac{1}{\sqrt{|k_N|}} \operatorname{cotgh} (\sqrt{|k_N|} \lambda_N) + \omega''_N \\ f_N = \overline{P_N F}_N = -\frac{1}{\sqrt{|k_N|} \operatorname{senh} (\sqrt{|k_N|} \lambda_N)} \end{array} \right. \quad (\text{per } k_N < 0)$$

Il procedimento praticamente usato per il rilievo delle traiettorie è il seguente. Fissata la corrente di eccitazione I_N al valore desiderato e mantenendo il filo teso con la tensione T , ma non alimentato, si rileva, mediante il proiettore P' , l'asse s . Quindi si spostano i punti V_1 e V_2 di vincolo di un eguale tratto x_0 , in modo da disporre il filo parallelamente all'asse ottico. Si rileva sulla scala S_C la posizione dell'immagine del reticolo proiettata da P e riflessa da S_p . Si alimenta il filo con un valore i di corrente tale da avere (in base alla (5')) il valore desiderato di $(B \rho)$. Il filo allora, se sono soddisfatte le condizioni di stabilità date in B , assumerà una configurazione stabile corrispondente ad una direzione d'ingresso nella lente non parallela ad s . Spostando il punto V_2 di vincolo lungo la retta 2 - 2 ortogonale ad s , si riporta la immagine del reticolo sulla scala S_C alla posizione iniziale. In queste condizioni il filo entra in Q_N parallelamente ad s ed il suo tratto rettilineo, uscente dalla lente, individua, nella intersezione con s , il punto F_N . Come già detto questo tratto rettilineo è determinato rilevando, mediante il proiettore P' i punti di coordinate (x, S_0) e $(\bar{x}, S_0 + S)$.

I rilevamenti sono ripetuti per diversi valori di x_0 , e quindi si passa ad un diverso valore di I_N . La fig. 9 mostra, nel P.M. del quadrupolo Q_1 , l'aspetto delle traiettorie rilevate all'uscita della lente stessa per un valore fissato di I_1 .

Da grafici di questo tipo è possibile ricavare, per ogni valore di x_0 , le quantità seguenti con gli errori max, a fianco indicati:

$$(33) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\bar{x} + x}{S} \quad (33') \quad \delta \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta \cdot \left(\frac{\delta x + \delta \bar{x}}{|\bar{x} + x|} + \frac{\delta S}{S} \right)$$

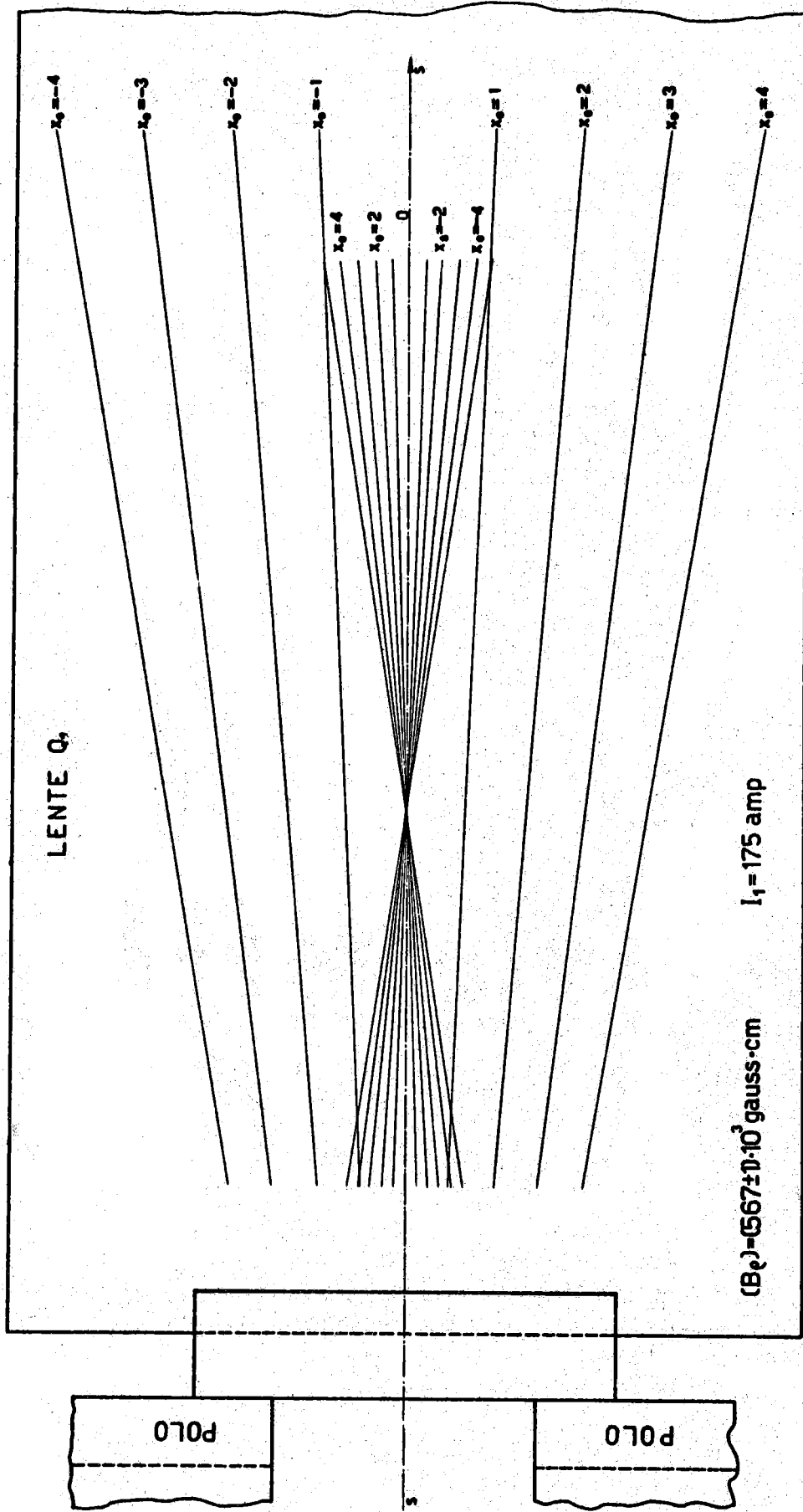


FIG. 9 - Aspetto del tracciato rilevato sperimentalmente delle traiettorie uscenti da Q_1 . Le traiettorie rilevate corrispondono a valori diversi della coordinata x_0 della Fig. 7 in entrambi i casi $k_1 > 0$ e $k_1 < 0$.

$$(34) \quad f = x_0 / \operatorname{tg} \theta \qquad (34') \quad \delta f = f \cdot \left(\frac{\delta x_0}{x_0} + \frac{\delta x + \delta \bar{x}}{|\bar{x} \pm x|} + \frac{\delta S}{S} \right)$$

$$(35) \quad s = x / \operatorname{tg} \theta \qquad (35') \quad \delta s = s \left\{ \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm x} \right| \cdot \left(\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta \bar{x}}{\bar{x}} \right) + \frac{\delta S}{S} \right\}$$

$$(36) \quad l = S_0 + s \qquad (36') \quad \delta l = \delta S_0 + \delta s$$

In esse le eventuali ambiguità di segno si risolvono scegliendo il segno + nel caso $k_N > 0$ e viceversa. In una prima serie di grafici (figg. 10 a) b)) si è riportato x_0 in funzione di $\operatorname{tg} \theta$ per vari I_N e nei due casi $k_N > 0$, e $k_N < 0$. I punti sperimentali, la cui incertezza si mantiene all'incirca costante^(x), si dispongono con piccola dispersione attorno a rette passanti per l'origine degli assi. Poichè, per x_0 crescente, non si osservano deviazioni sistematiche dei punti dall'andamento rettilineo che caratterizza l'assenza di aberrazione sferica, si può concludere che almeno per: $-4 \leq x_0 \leq +4$ cm, e: $0 < I_N < 250$ amp, l'aberrazione anzidetta, se presente, è contenuta nell'incertezza delle misure.

Questo risultato appare non sorprendente se si considera che, nei limiti sopra fissati, le lunghezze magnetiche $\lambda_{N(x, I_N)}$ di entrambe le lenti si mantengono sensibilmente costanti (cfr. Parte II^a, D ed E).

Assumendo quindi di poter ritenere trascurabile la aberrazione sferica, si è determinata la distanza focale f_N come pendenza della "miglior retta" determinata con i minimi quadrati con una incertezza δf_N pari alla incertezza su detta pendenza. Questo procedimento fornisce per f_N un risultato più attendibile rispetto alla determinazione della distanza focale a partire da una coppia qualsiasi di valori corrispondenti x_0 , $\operatorname{tg} \theta$ in base alla (34).

Analogo procedimento si è seguito nella determinazione di I_N ; anche qui il valore di s che compare nella (36) è stato determinato come pendenza della "miglior retta" nel grafico che riporta x in funzione di $\operatorname{tg} \theta$.

I grafici delle figg. 11 e 12 rappresentano rispettivamente f_N ed I_N in funzione della corrente di eccitazione per entrambe le lenti.

(x) - Infatti, per i punti delle figg. 10-a), b), si ha: $\delta x_0 = \pm 0.1$ mm per ogni valore di x_0 , inoltre dalle (33) e (33') si ricava:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\delta x + \delta \bar{x}}{S} + |\operatorname{tg} \theta| \frac{\delta S}{S} = \frac{\delta l}{S} \cdot (2 + |\operatorname{tg} \theta|).$$

Ponendo poi: $\delta l = \delta x = \delta \bar{x} = \delta S = 0.25$ mm, $S = 400$ mm, si ha per i valori di $\operatorname{tg} \theta$ considerati; $1.25 \times 10^{-3} \leq \delta \operatorname{tg} \theta \leq 1.37 \times 10^{-3}$.

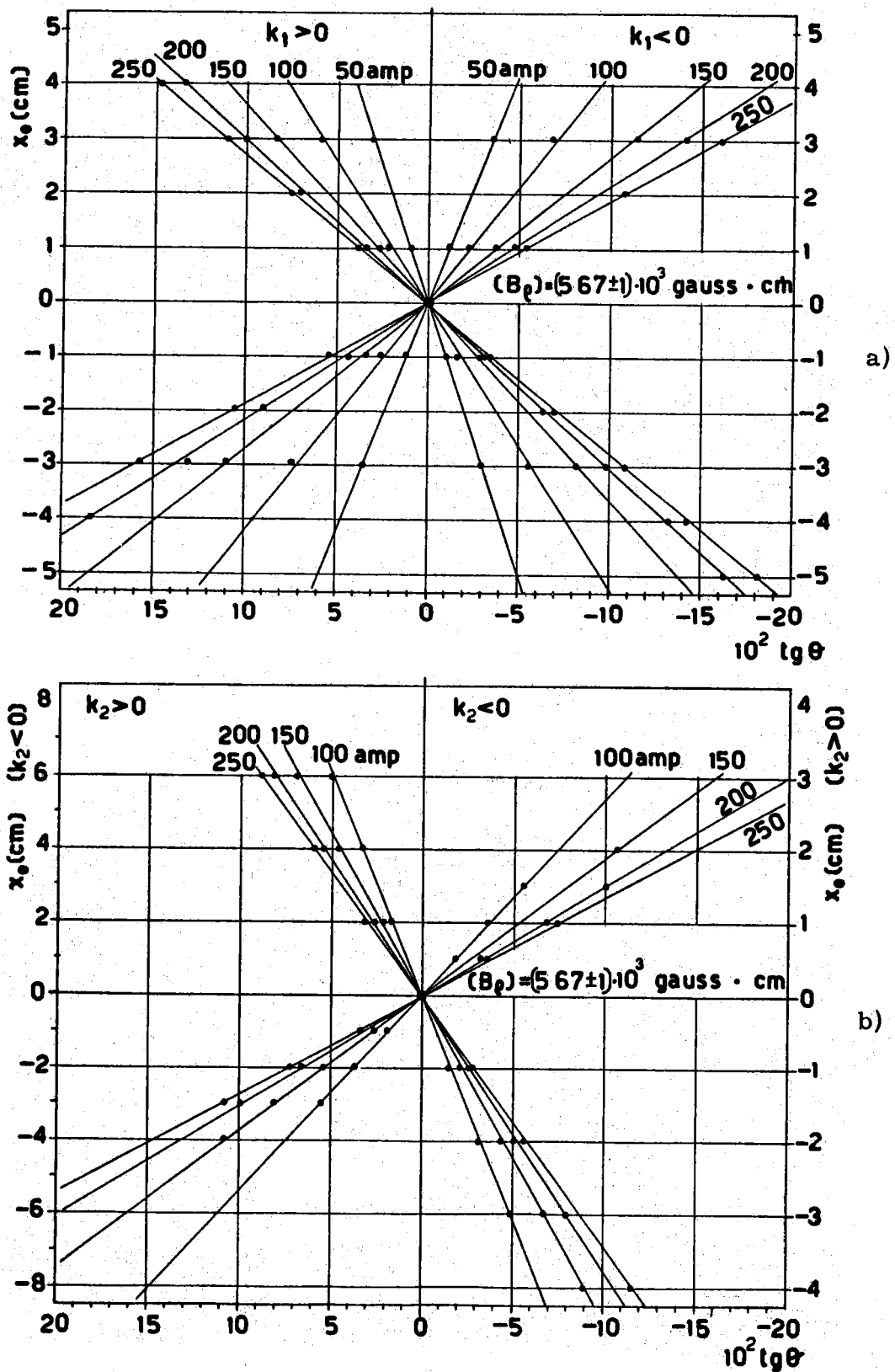


FIG. 10 - Andamento, ricavato sperimentalmente, della tangente dell'angolo θ di uscita delle traiettorie dalla lente, in funzione della coordinata x_0 d'ingresso del filo. Sono riportati entrambe i casi in cui il P. M. è convergente e divergente. I risultati in a) ed in b) sono relativi alle lenti Q_1 e Q_2 rispettivamente.

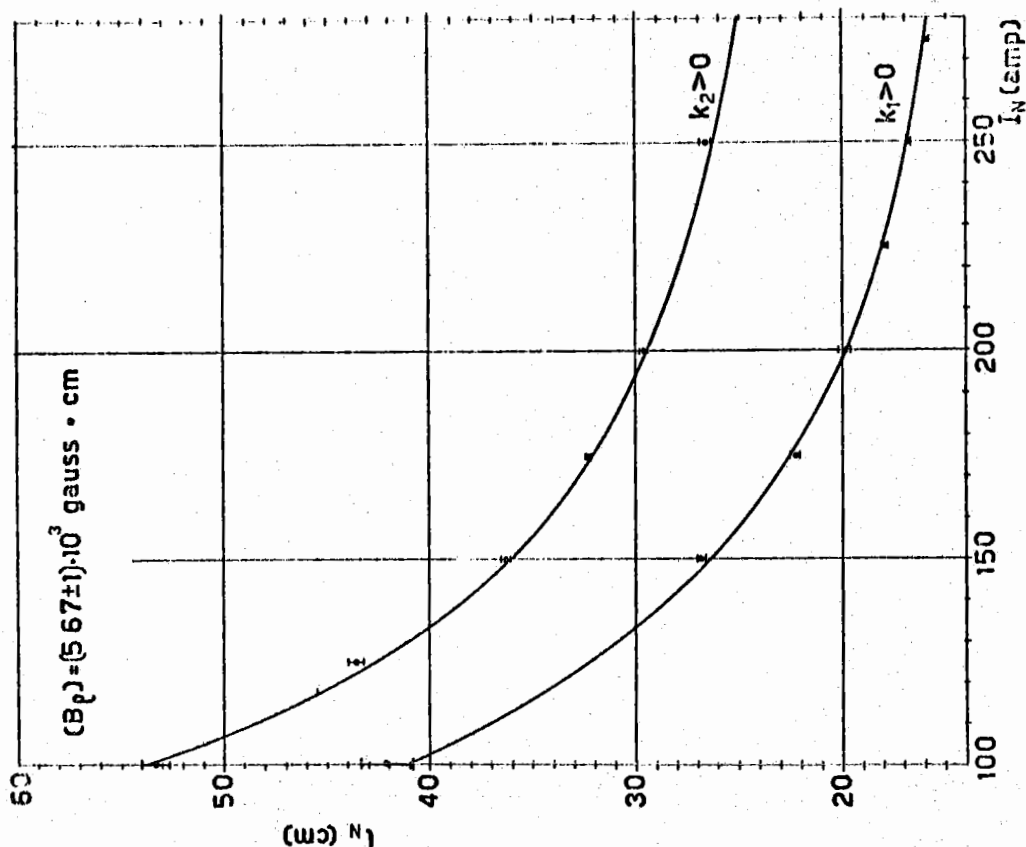


FIG. 12 - Andamento sperimentale della distanza I_N tra il bordo d'uscita geometrica di Q_N ed il fuoco F_N in funzione di I_N . Le curve continue rappresentano le previsioni effettuate dalle misure di campo (modello rettangolare efficace).

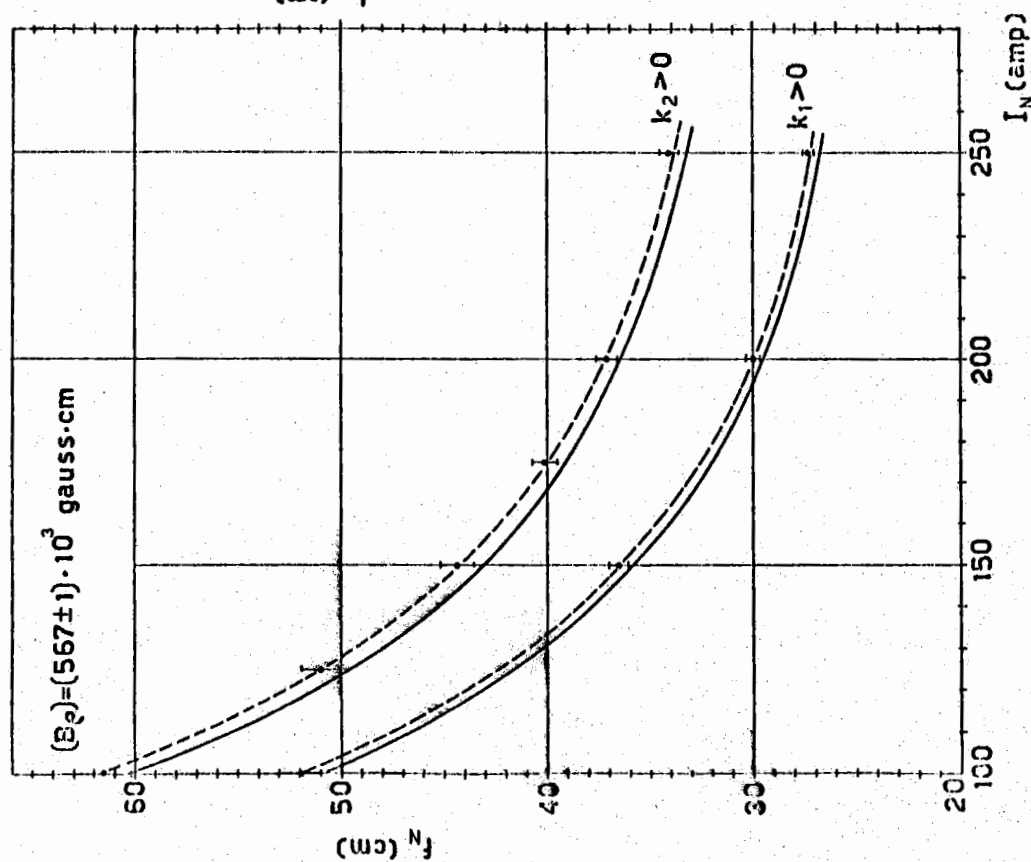


FIG. 11 - Andamento sperimentale della distanza focale f_N in funzione della corrente di eccitazione I_N in entrambe le lenti. I grafici ottenuti sono stati ricavati utilizzando i risultati delle misure riportate in fig. 10, mentre le curve continue rappresentano le previsioni effettuate al 1° ordine sulla base delle misure di campo (modello rettangolare efficace di Q_N).

3°) - Il programma di misure svolto sul magnete analizzatore si limitò a controllare:

- a) - la deflessione angolare effettiva
- b) - la dispersione lineare in impulso.

La disposizione sperimentale è quella mostrata in fig. 8; mentre i metodi di allineamento e di rilievo delle traiettorie sono stati altrove descritti (cfr. App. A-5 ed E- 1°).

Per la misura di cui a) si è fissata l'eccitazione del magnete così da realizzare nel traferro il valore dell'induzione previsto con calcolo^(x) e si sono scelti per il filo valori di i e T in modo da simulare particelle di impulso $p_0 = 163 \text{ MeV}/c$. Spostando il dispositivo di vincolo \mathcal{V}_2 lungo la retta 2-2 si è realizzato l'ingresso in M lungo l'asse s , e si è rilevato il tratto rettilineo di \mathcal{C} all'uscita del magnete. Nota la direzione d'ingresso si è rilevato l'angolo di deflessione effettivo⁽⁺⁾.

Si è ottenuto da questa misura un valore della deflessione pari a $28^\circ.30' \pm 0^\circ.15'$ che, tenuto conto delle incertezze sul valore dell'impulso simulato e di rilievo della traiettoria si può ritenere soddisfacentemente coincidente con la deflessione geometrica $\varphi = 28^\circ 40'$. Pertanto il valore di B_{0M} calcolato in base alle misure di lunghezza magnetica si può ritenere senz'altro soddisfacente.

Per la misura di cui al punto b) si è variata la corrente nel filo in modo da realizzare incrementi percentuali assegnati dall'impulso simulato. Per ogni valore di p si è spostato il vincolo \mathcal{V}_2 fino ad ottenere l'ingresso del filo in M lungo l'asse s , e si sono rilevate le coordinate x ed \bar{x} . Da esse, per mezzo della relazione:

$$(37) \quad x_{F'} = x - \frac{S_0 - \overline{FF'}}{S} (\bar{x} - x)$$

si è determinato lo scostamento $x_{F'}$, del filo dall'asse s lungo il bordo equivalente di uscita di M .

(x) - Ricordiamo che il valore dell'induzione B_{0M} è stato scelto in modo da ottenere con la lunghezza magnetica effettiva λ_M una deflessione angolare effettiva pari a quella geometrica φ (cfr. Parte II^a, E-3°).

(+) - Si è qui utilizzato il fatto che il prolungamento della direzione iniziale della \mathcal{C} (normale alla faccia d'ingresso di M) forma con la faccia di uscita del magnete, un angolo (acuto) pari al complemento dell'angolo di apertura geometrica φ di M .

Nella fig. 13 sono riportati i valori sperimentali di $x_{F'}$, in funzione di $\Delta p/p_0$. La retta continua della stessa figura rappresenta invece la relazione^(x):

$$(38) \quad x_{F'} = \rho \cdot (1 - \cos \varphi) \frac{\Delta p}{p}$$

che è dedotta applicando l'ottica al 1° ordine al "modello rettangolare efficace" assunto per M.

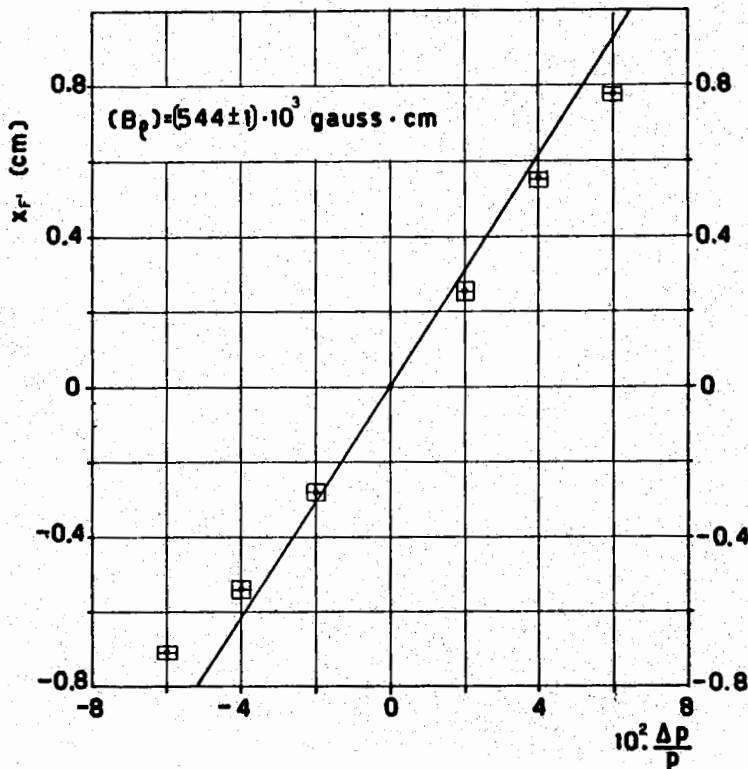


FIG. 13 - Rilievo sperimentale della dispersione lineare in impulso del magnete M. La curva in corrispondenza del lordo d'uscita equivalente continua rappresenta l'andamento previsto in base a calcoli al 1° ordine ed alle misure di campo.

(x) - Si può infatti mostrare⁽¹⁰⁾ che, al 1° ordine e per un settore magnetico a campo uniforme "sharp edged" alle testate, si può scrivere con le solite notazioni:

$$\begin{cases} x_{F'} = x_{E'} \cos \varphi + x'_{E'} \rho \sin \varphi + \rho (1 - \cos \varphi) \Delta p/p \\ x'_{F'} = \frac{-x_{E'}}{\rho} \sin \varphi + x'_{E'} \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \Delta p/p \end{cases}$$

Ponendo: $x_{E'} = 0$, $x'_{E'} = 0$ si ottiene la (38) che esprime, nelle ipotesi suddette la dispersione lineare in impulso lungo il bordo di uscita di M.

F) - CONCLUSIONI -

Dal confronto tra i dati raccolti con l'odoscopio a filo e le previsioni effettuate al 1° ordine sulla base del "modello rettangolare efficace" dedotto dalle misure magnetiche (Parte II^a, E) è possibile trarre alcune conclusioni che specifichiamo nel seguito.

Per ciò che riguarda le lenti quadrupolari Q_N si constata un buon accordo tra i valori di l_N (I_N) misurati e quelli calcolati (entro qualche % per la maggioranza dei punti sperimentali; cfr. fig. 12). Si osserva invece un accordo meno buono tra i valori misurati e quelli previsti per le distanze focali $f_N(I_N)$. In questo caso si rilevano deviazioni sistematiche contenute entro il $2 \div 3\%$ la cui grandezza appare lievemente superiore all'errore max. stimato delle misure (cfr. fig. 11).

Questa situazione sembra confermata, come mostrano alcune misure di controllo effettuate, anche nel caso $k_N < 0$ (P.M. divergente). In ogni caso le discrepanze tra misure e previsioni sembrano accentuarsi per la lente più corta (Q_2).

A questo punto è forse opportuno osservare che le deviazioni sistematiche osservate per le distanze focali non possono essere ritenute come conseguenza di un errore sistematico nell'azzeramento dell'angolo x'_0 del filo rispetto all'asse ottico delle lenti poichè detto errore dovrebbe anche comparire nelle misure di l_N essendo i valori sperimentali di l_N ed f_N ricavati simultaneamente dalle stesse traiettorie. Va infine tenuto presente che la procedura di elaborazione dei dati sperimentali (least square best fit mediante rette) minimizza l'effetto di errori accidentali.

La spiegazione più plausibile delle discrepanze osservate è probabilmente da ricercare nel fatto che le traiettorie reali nel campo della lente differiscano sensibilmente da quelle previste al 1° ordine col modello rettangolare in modo da produrre, rispetto a quest'ultime, piccoli spostamenti degli elementi cardinali della lente e particolarmente nella posizione dei piani principali.

In sostanza si può ritenere che la procedura di previsione delle proprietà ottiche di una lente Q_N da noi seguita fornisce risultati assai attendibili per gli usi pratici, mentre per una previsione più accurata di tali proprietà è più opportuno utilizzare i dati forniti dalle misure con l'odoscopio.

Per quanto riguarda il magnete analizzatore M, le misure di dispersione eseguite ($x_{F'}$ in funzione di $\Delta p/p$) mostrano che le previsioni fatte con la teoria del 1° ordine e sulla base del "modello efficace" dedotto dalle misure di campo risultano verificate solo per $|\Delta p/p| < 4\%$. Per valori assoluti di $\Delta p/p$ maggiori si osserva un comportamento non lineare della curva di dispersione certamente attribuibile ad aberrazioni.

Ringrazio il Dr. P. Bounin del Laboratorio dell'Acceleratore Lineare di Orsay per le utili discussioni. Mi è gradito altresì ringraziare i Sigg. F. Bartoccini, G. Ferrario per la collaborazione fornita nelle misure ed i Sigg. Di Stefano e R. Bonini per la realizzazione delle parti meccaniche.

BIBLIOGRAFIA -

- (1) - J. Loeb, Compt. rend. 222, 488 (1946).
- (2) - J. Loeb, Onde Electr. 27, 27 (1947).
- (3) - P. J. Lynch and D. J. Zafferano, I. S. C. 927 (1957).
- (4) - B. Milman and P. Bounin, Rev. Sci. Instr. 34, 1448 (1963).
- (5) - A. Citron et al., CERN Report 59-8 (1959).
- (6) - E. Persico, Lezioni sulle macchine acceleratrici (CNRN 1958-59), pag. 61.
- (7) - U. Amaldi e T. Levi Civita, Lezioni di Meccanica Razionale (N. Zanichelli, Bologna 1950) - Vol. I^o, pag. 672.
- (8) - R. N. Carlile, Thesis, Stanford University (1956).
- (9) - J. Pinel, Ann. Radio 14 n. 57 (1959); 15 n. 59 (1960).
- (10) - S. Penner, Rev. Sci. Instr. 32, 150 (1961).
- (11) - E. Weber, Electromagnetic Fields (J. Wiley, New York) Vol. I^o, pag. 238.

APPENDICI -

A. 1. - Vogliamo qui dedurre le relazioni (1) e (2) date al paragrafo B.

Detta σ l'ascissa curvilinea sulla traiettoria della particella, \vec{t} il versore tangente, τ il tempo, \vec{B} l'induzione magnetica, l'equazione del moto della particella si scrive:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} - q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$$

Essa può essere scritta nella forma seguente:

$$(A. 1-I) \quad \frac{d\vec{p}}{d\sigma} - q \cdot \vec{t} \wedge \vec{B} = 0,$$

per la quale si è fatto ricorso alla relazione: $\vec{v} = \frac{d\sigma}{d\tau} \vec{t}$. D'altra parte la equazione di equilibrio del filo sottoposto alla tensione T ed a forze laplaciane, date, per unità di lunghezza, da: $\frac{d\vec{F}_L}{d\sigma} = i \vec{t} \wedge \vec{B}$, si scrive:

$$(A. 1-II) \quad \frac{d\vec{T}}{d\sigma} + i \vec{t} \wedge \vec{B} = 0.$$

Osserviamo poi che:

$$\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = \frac{dp}{d\sigma} \vec{t} + p \frac{d\vec{t}}{d\sigma}$$

, ed analogamente:

$$\frac{d\vec{T}}{d\sigma} = \frac{dT}{d\sigma} \vec{t} + T \frac{d\vec{t}}{d\sigma}$$

Ora i termini $dp/d\sigma$ e $dT/d\sigma$ sono diretti secondo \vec{t} , mentre sia la forza di Lorentz che quelle di Laplace sono ortogonali a \vec{t} . Si deve perciò concludere che deve essere: $dp/d\sigma = 0$ e $dT/d\sigma = 0$. Si ha quindi:

$$\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = p \frac{d\vec{t}}{d\sigma} \quad , \text{ ed analogamente: } \quad \frac{d\vec{T}}{d\sigma} = T \frac{d\vec{t}}{d\sigma}$$

Le equazioni (A. 1-I) e (A. 1. -II) si scrivono pertanto:

$$(A.1-III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{d\sigma} - \frac{q}{p} \vec{t} \wedge \vec{B} = 0 \\ \frac{d\vec{t}}{d\sigma} + \frac{i}{T} \vec{t} \wedge \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{cfr. relazioni (1) e (2) del testo})$$

Queste sono le equazioni differenziali (in forma vettoriale) della traiettoria $\mathcal{C}_{p,q}$ e della configurazione $\mathcal{C}_{T,i}$ di equilibrio. Si vede subito che, affinché le due equazioni scritte ammettano la stessa curva come soluzione, è necessario che sia:

$$\frac{p}{q} = - \frac{T}{i}$$

e che inoltre le condizioni iniziali siano le stesse.

Assumiamo poi che la nostra distribuzione di campo ammetta un piano (di simmetria per le superfici equipotenziali magnetiche) per il quale è: $\vec{B}(P) = B(P) \cdot \vec{b}$, con \vec{b} versore della normale a detto piano e P un punto generico di esso. Aggiungiamo anche l'ipotesi che la direzione di ingresso della particella e del filo coincidano e siano contenute nel piano suddetto^(x). Tenuto conto della formula (di Frenet):

$$\frac{d\vec{t}}{d\sigma} = \frac{n}{\rho}$$

e che tra i versori \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} , sussiste la relazione:

$$\vec{t} \wedge \vec{b} = -\vec{n} \quad (\text{Terna levogira}),$$

si potrà scrivere al posto delle (A.1-III):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{p}{\rho} + q B\right) \vec{n} = 0 \\ \left(\frac{T}{\rho} - i B\right) \vec{n} = 0 \end{array} \right.$$

(x) - Con tali ipotesi sia $\mathcal{C}_{p,q}$ che $\mathcal{C}_{T,i}$ saranno sempre contenute nel piano di simmetria (P.M.).

Da queste si deduce immediatamente che, per la $\mathcal{C}_{p,q}$ e per la $\mathcal{C}_{T,i}$ separatamente, devono valere in ogni punto le relazioni:

$$\frac{p}{q} = (B\rho), \quad \text{e:} \quad -\frac{T}{i} = (B\rho) .$$

La quantità $(B\rho)$ è costante in ogni punto della $\mathcal{C}_{p,q}$ (o della $\mathcal{C}_{T,i}$), dentro la distribuzione e prende il nome di "rigidità magnetica".

A. 2. - Dedurremo la (10) e calcoleremo esplicitamente la $f(x/a)$. Osserviamo innanzi tutto che la risultante delle forze agenti sulla unità di lunghezza di un filo rettilineo, percorso la corrente i , posto nel vuoto a distanza d da una superficie piana al di là delle quale trovasi una distribuzione infinita di materiale di permeabilità μ_r , si scrive⁽¹¹⁾:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{i^2}{2d} \quad (\text{unità razionalizzate}) .$$

Nell'ipotesi $\mu_r = \infty$, e per un tratto $d\sigma$ di filo, si può scrivere

$$dF = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i^2}{2d} d\sigma .$$

Con le ipotesi poste al punto 2° del D ed assumendo la geometria della fig. 4a) si può scrivere per la risultante dF_M delle 4 forze elementari agenti su $d\sigma$ e dovute alla presenza dei 4 poli.

$$(A.2-I) \quad dF_M = 2dF_1 \cos\theta_1 - 2dF_2 \cos\theta_2$$

cioè:

$$(A.2-II) \quad dF_M = \frac{\mu_0}{2\pi} i^2 d\sigma \left\{ \frac{\cos\theta_1}{d_1} - \frac{\cos\theta_2}{d_2} \right\} .$$

In quest'ultima espressione si dovrà poi porre:

$$(A.2-III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1 = \frac{b-x}{\sqrt{b^2 + (b-x)^2}} \quad , \quad \cos \theta_2 = \frac{b+x}{\sqrt{b^2 + (b+x)^2}} \\ d_1 = \sqrt{b^2 + (b-x)^2} - R \quad , \quad d_2 = \sqrt{b^2 + (b+x)^2} - R \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} (R+a) \end{array} \right.$$

Effettuando le sostituzioni, si ottiene:

$$(A.2-IV) \quad dF_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i^2}{a} d\sigma \cdot f(x/a),$$

dove $f(x/a)$ è una funzione adimensionale data da:

$$f(x/a) = \frac{\frac{b-x}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b-x}{a}\right)^2 - \frac{R}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b-x}{a}\right)^2}} - \frac{\frac{b+x}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b+x}{a}\right)^2 - \frac{R}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b+x}{a}\right)^2}} .$$

Essa è riportata in fig. 4b) nel caso in cui $R = 1.15 a$.

A.3. - Dedurremo le (16) a partire dalla (14).

Esprimiamo anzitutto il versore \vec{v} mediante i versori della terna intrinseca a \mathcal{C} . Si ha:

$$\vec{v} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \vec{t} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \vec{n} + \cos \gamma \cdot \vec{b}$$

ossia:

$$(A.3-I) \quad \vec{v} = \sin \alpha \cdot \vec{t} + \sin \beta \cdot \vec{n} + \cos \gamma \cdot \vec{b}$$

Da questa si ricava la relazione (17) tra i moduli:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta + \text{cos}^2 \gamma = 1 .$$

Calcoliamo ora le componenti secondo \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} del prodotto vettore $\vec{t} \wedge \vec{v}$ che figura nella (14). Esse sono ricavabili dai minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \alpha & \text{sen} \beta & \text{cos} \gamma \end{vmatrix}$$

Si ha perciò:

$$(A.3-II) \quad \vec{t} \wedge \vec{v} = -\text{cos} \gamma \cdot \vec{n} + \text{sen} \beta \cdot \vec{b} .$$

Sviluppiamo ora la derivata $\frac{d\vec{T}}{d\sigma}$. Tenendo conto che $\vec{T} = T \cdot \vec{t}$ e della formula di Frenet: $\frac{d\vec{t}}{d\sigma} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, si ottiene:

$$(A.3-III) \quad \frac{d\vec{T}}{d\sigma} = \frac{dT}{d\sigma} \vec{t} + \frac{T}{\rho} \vec{n}$$

Sostituendo le (A.3-I) (A.3-II) (A.3-III) nella (14) ed ordinando i termini rispetto \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} , si ottiene infine l'equazione vettoriale:

$$\left(\frac{dT}{d\sigma} + \lambda \cdot \text{sen} \alpha \right) \vec{t} + \left(\frac{T}{\rho} - i B \text{cos} \gamma + \lambda \text{sen} \beta \right) \vec{n} + (i B \text{sen} \beta + \lambda \text{cos} \gamma) \vec{b} = 0,$$

dalla quale le (16) sono ricavate.

A.4. - Ricaveremo la limitazione (30) data per l'errore percentuale ϵ introdotto dall'attrito tra i perni della puleggia e le loro sedi.

Nelle condizioni effettive di lavoro della puleggia (fig. 6-a), detto P il peso applicato, T' (> P) il valore di "soglia" della tensione T(x), N la forza normale che il perno esercita sulla sua sede, ed f_s il coefficiente di

(x) - T' indica cioè quel valore limite della tensione per cui un incremento positivo dT determina la rotazione della puleggia inizialmente in quiete.

attrito statico, l'equazione dei momenti delle forze attorno all'asse 0, nella condizione limite per l'avvio della puleggia, si scrive:

$$T' r_p - (P r_p + f_s N r_o) = 0$$

Per il calcolo di N, si può assumere $P \approx T \approx T'$, onde:

$$N = \sqrt{2} \cdot T$$

Pertanto per l'errore ε si ottiene:

$$(A.4-I) \quad \varepsilon = \frac{T' - T}{T} \approx \sqrt{2} \cdot f_s \cdot \frac{r_o}{r_p}$$

Consideriamo ora le condizioni rappresentate nella fig. 6-b. Nella condizione corrispondente al valore max p_1 del peso per cui il piatto sale, si può scrivere la disequaglianza:

$$(A.4-II) \quad T_A r_p - (p_1 r_p + f_s N' r_o) > 0$$

$$\text{dove: } N' = p_1 + T_A \approx 2 T_A$$

Nella condizione corrispondente al minimo valore p_2 del peso per cui il piatto discende, si avrà invece:

$$(A.4-III) \quad T_A r_p - (p_2 r_p + f_s N'' r_o) < 0$$

$$\text{nella quale: } N'' = p_2 + T_A \approx 2 T_A$$

Dalle disequaglianze (A.4-II) e (A.4-III) si ricava:

$$f_s < \frac{(p_2 - p_1) r_p}{4 T_A r_o}$$

Pertanto la (A.4-I) diviene:

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{p_2 - p_1}{T_A}$$

In pratica è poi conveniente assumere $T_A \approx T$.

A.5. - Descriviamo qui dettagliatamente le operazioni effettuate e gli strumenti usati per l'allineamento dell'odoscopio e del magnete in misura. Per la messa in orizzontale di superfici materiali fu fatto uso di una livella a bolla di elevata sensibilità (0.04 mm/m). L'asse geometrico dei quadrupoli fu invece rilevato utilizzando un tubo (lunghezza 1 m) tornito di precisione esternamente ed intestato agli estremi; esso poteva essere inserito senza giuoco tra le quattro espansioni polari, individuando, mediante due crocere di fili ortogonali disposte agli estremi, il loro asse di simmetria. La condizione b) di cui al par. E, fu invece realizzata, per le lenti Q_N , utilizzando una livella a cannocchiale KERN-NK3 dotata di micrometro ottico. Questa era preventivamente allineata sull'asse passante per i centri delle crocere di cui sopra, poi regolando la messa a fuoco fu allineato il punto V_1 del vincolo \mathcal{V}_1 quindi il punto V_2 di \mathcal{V}_2 .

Per il magnete M la condizione b) fu realizzata sempre con l'uso della livella a cannocchiale, ma utilizzando anche uno specchio disposto nel traferro del magnete (S'_p in fig. 8). Lo specchio, accuratamente posizionato rispetto al traferro stesso, reca una traccia verticale; si può dire che la livella a cannocchiale è allineata sull'asse s uscente dal magnete, quando il punto V_1 , la traccia nello specchio, ed il reticolo visibile nel campo della livella risultano sovrapposti^(x).

I vincoli \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 sono poi disposti, lungo l'asse s , sempre tenendo conto dei criteri citati sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio del filo (cfr. par. B). Particolarmente delicata risultò poi la realizzazione dell'ultima condizione data al par. E.

Mediante un opportuno supporto a viti calanti e con l'aiuto della livella a bolla, fu possibile disporre orizzontalmente al disopra (~ 1 m) della incastellatura di sostegno della lastra di vetro (cfr. fig. 2a) uno specchio avente la faccia argentata rivolta verso il basso. Regolando la distanza tra le lenti di P' , si realizzò un fascetto di luce leggermente divergente. Questo, dopo la riflessione sullo specchio orizzontale, era raccolto su uno schermo circolare opaco forato al centro e disposto concentricamente al diaframma in uscita di P' . Agendo sulle viti di regolazione del sostegno del braccio articolato ed osservando la posizione relativa del centro della macchina luminosa riflessa e del forellino di uscita del proiettore fu possibile disporre l'asse di questo entro $\pm 3'$ rispetto alla verticale. Dopo aver controllato che gli spostamenti del braccio articolato (cfr. fig. 2-b) non cambiassero l'allineamento descritto, si tolse lo schermo da P' e si regolò la posizione delle lenti in modo da rendere il fascetto di luce sensibilmente parallelo.

(x) - Il punto V_1 è stato ovviamente allineato in precedenza sull'asse s entrante in M. Si deve poi ricordare che la deflessione effettiva in M è pari alla deflessione geometrica (cfr. Parte II^a, C - 2°).

Per quanto riguarda le precisioni conseguite nella realizzazione delle condizioni date al par. E del testo si può dire che l'orizzontalità di superfici (condizioni a, b, c) fu realizzata entro $\pm 0,1$ mrad, mentre l'asse ottico fu individuato con una incertezza di $\pm 0,2$ mrad. I punti V_1 e V_2 furono allineati lungo lo stesso asse entro scostamenti max di $\pm 0,1$ mm. Infine la condizione e) fu realizzata con l'incertezza di $\pm 3'$.